Cours de relativité

Relativité restreinte non-inertielle et Relativité générale

Licence 3 - Master - Écoles d'ingénieurs

2025 - Mathieu ROUAUD

Introduction

Ce document regroupe les cours donnés sur un semestre à l'*Université Mayor San Simon* de Cochabamba en Bolivie. Il existe un grand nombre d'excellents livres et de pdf sur la relativité générale, voilà ce qui caractérise et peut différencier celui-ci :

1. De nombreux exercices avec des corrections détaillées accompagnent le cours.

2. Souvent la relativité restreinte n'est étudiée que dans le contexte inertiel, or, en absence de gravitation, celle-ci s'applique aussi aux référentiels non-inertiels. Nous étudions les cas du référentiel en translation rectiligne uniformément accéléré, et celui du référentiel tournant. C'est un sujet très riche qui permet une transition douce vers la relativité générale, en se familiarisant avec la notion de temps coordonné, le calcul tensoriel et le formalisme Lagrangien.

3. En cartographie, nous utilisons diverses métriques pour représenter la sphère sur un plan. Le chemin le plus court n'est plus nécessairement une ligne droite. Nous utilisons cette analogie pour comprendre les géodésiques qui maximisent le temps propre en relativité générale.

4. Certains chapitres s'appuient sur un article de recherche et permettent de se préparer à adopter la démarche du chercheur.

Bonne lecture !

Toujours content de recevoir du courrier de mes lecteurs : ecrire@incertitudes.fr

Pré-requis conseillés :
maths et mécanique L1, relativité restreinte et électromagnétisme (équations de Maxwell).

Pour la relativité restreinte il sera régulièrement fait référence au livre du même auteur :

[RR] *Relativité restreinte, Approche géométrique*
suivi de la conférence Les voyages interstellaires et l'antimatière,
2020, 536 pages.

Fichiers sur github.com/Mathieu-ROUAUD

Ce livre est sous license Creative Commons Attribution-Non Commercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0).

Premier cours

Relativité Restreinte

Mathieu : Bonjour. Commençons.
Depuis notre naissance, nous vivons dans la fiction sociale du temps absolu. Pourtant, comme nous allons l'expliquer aujourd'hui, le temps est relatif. Cette notion nouvelle demande d'être clairement explicitée, sinon de nombreuses confusions peuvent surgir. Par exemple, la relativité du temps ne remet nullement en question la causalité. Impossible de voyager dans le passé, ou que quelqu'un du futur vienne nous visiter. Par contre, comme nous le verrons par la suite, nous pouvons voyager dans le futur des autres.

Arkaitz : Monsieur, mais pourquoi ne pas commencer directement par la relativité générale ? Nous avons déjà eu des cours de relativité restreinte dès la licence.

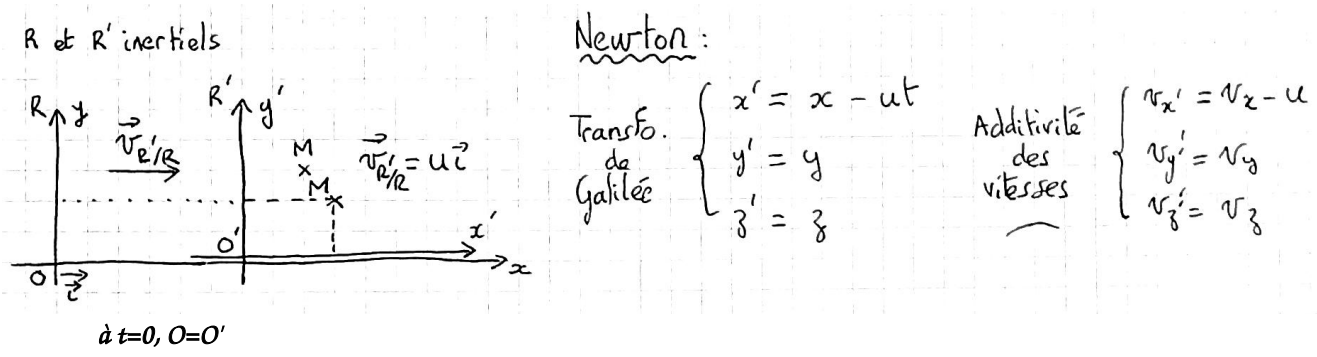
Mathieu : En effet, cela peut sembler inutile de recommencer ce que l'on sait déjà. Mais chaque enseignant a une approche différente de la relativité restreinte. Aujourd'hui, par exemple, nous verrons un outil visuel pour déterminer la dilation du temps que vous n'avez jamais vu auparavant : le triangle des temps. De plus, ce sera pour nous l'occasion d'introduire les notations, et, dès le troisième cours nous introduirons l'approche tensorielle nécessaire pour la générale. Avec une nouvelle définition de la relativité restreinte qui se détache du biais historique de la lumière, et qui a permis, grâce aux symétries, de construire le Modèle Standard.

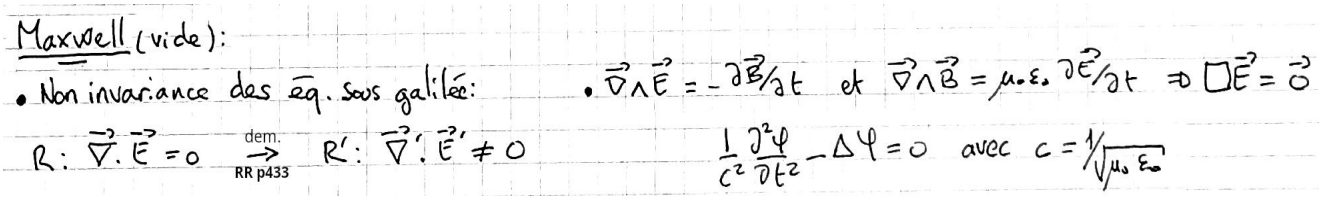
Cristian : D'accord. Et quand commencerons-nous la relativité générale en tant que telle ?

Mathieu : Nous avons au total 18 cours, seuls les 6 derniers traiteront exclusivement de la générale. Auparavant, nous devons compléter vos cours de restreinte, vous ne connaissez pas encore le calcul tensoriel, et par exemple nous allons mettre les équations de Maxwell sous forme de tenseur, ce qui nous guidera ensuite par analogie pour les ondes gravitationnelles. Nous traiterons la relativité restreinte dans des référentiels accélérés, nouveau aussi pour vous. Ce sera l'occasion de présenter les espaces vectoriels métriques et le Lagrangien.

D'autres questions ?

Bon, alors... Historiquement, la notion de temps relatif est le fruit de la contradiction entre deux théories. D'un côté, nous avons la théorie de Newton de 1687 qui décrit le mouvement des objets et de la matière en général, et de l'autre, la théorie de Maxwell de 1864 qui décrit le comportement de la lumière en terme d'ondes électromagnétiques. Ces deux théories, très bien vérifiées expérimentalement, énoncent leurs lois dans des référentiels inertiels. Or, la première prédit l'additivité des vitesses, ce qui entre en contradiction avec, dans la deuxième, la constance de la vitesse de la lumière dans le vide.





Une idée, pour mettre tout le monde d'accord et sauver les deux théories, serait que la lumière se propage dans un référentiel particulier nommé l'*éther*. Or, les expériences de Michelson-Morley, menées dès 1887, prouvent que l'éther, milieu de propagation supposé de la lumière, n'existe pas.

Ce qui amène Einstein à proposer nouvelle une théorie en 1905. Cette théorie est bien plus satisfaisante car elle intègre matière et lumière dans le même cadre. Voilà les deux principaux **postulats** de la théorie de la relativité restreinte d'Einstein :

1. *Principe de relativité* : Les lois de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels inertiels.

   Notez le mot *physique* et non *mécanique* comme avec Newton :
   physique = mécanique + électromagnétisme = matière + lumière

2. *Universalité de la vitesse de la lumière* : La vitesse de la lumière dans le vide est la même pour tous les observateurs inertiels.

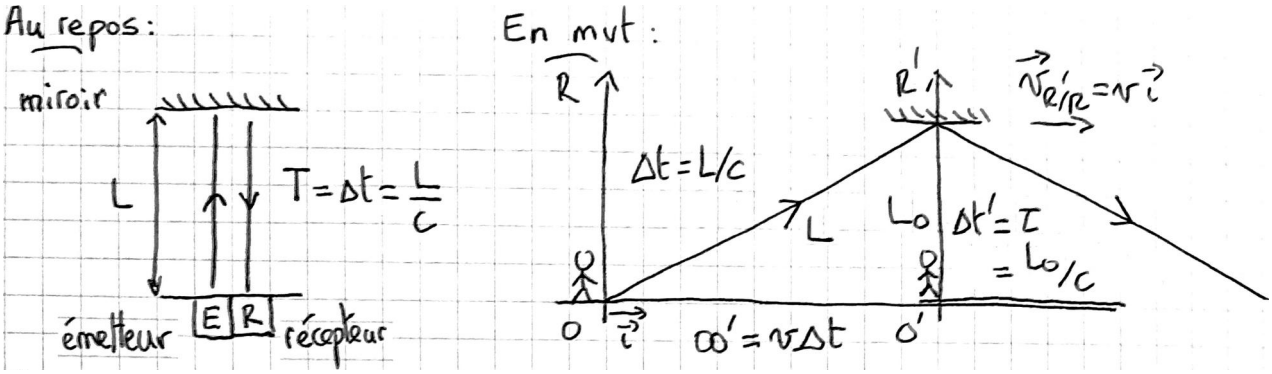
   c = 299 792 458 m/s (constante universelle fixée par la relativité restreinte)

Arkaitz : C'est étonnant que la lumière joue un rôle aussi central. Les ondes gravitationnelles, comme vérifié en 2017, vont aussi à la vitesse c, et toute particule de masse nulle. Je trouve étrange que le contenu et le contenant soient liés.

Mathieu : Oui, le deuxième postulat est en fait inutile. C'est une conséquence d'hypothèses simples sur les symétries : 3 dimensions d'espace, une de temps, homogénéité du temps et de l'espace, isotropie de l'espace, principes de relativité et de causalité. Ces hypothèses semblent naturelles et permettent de trouver la transformée de Lorentz en quelques pages de calcul[1]. La constante c apparaît alors comme une constante de structure propre à l'espace-temps, sans lien avec un quelconque objet physique.
Il est intéressant de noter que Newton avait découvert les outils mathématiques du calcul différentiel qui auraient pu lui permettre de trouver ce changement de coordonnées le plus général entre deux référentiels inertiels. Sans s'en rendre compte, il s'est restreint au cas limite où c est infini, et l'espace et le temps, absolus et disconnectés.

Continuons néanmoins avec les 2 postulats historiques d'Einstein et décrivons l'***horloge de Pythagore***. Imaginons une horloge qui utilise des rayons lumineux. Un rayon lumineux est émis, se réfléchit sur un miroir et revient au même point après une durée $2T$:

1 Bien expliqué et démontré par Jean-Marc Lévy-Leblond, « One more derivation of the Lorentz transformation », American Journal of Physics 44 (3) 271 - 277 (1976).



L'horloge est au repos dans R' et se déplace à la vitesse $\vec{v}$ par rapport à R. La distance parcourue par le rayon dans R est donc plus grande, tout en gardant la vitesse constante :

$$\text{d'où} \quad L^2 = {L_0}^2 + OO'^2 \quad \Rightarrow \quad c^2\Delta t^2 = c^2\Delta t'^2 + v^2\Delta t^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\Delta t'$$

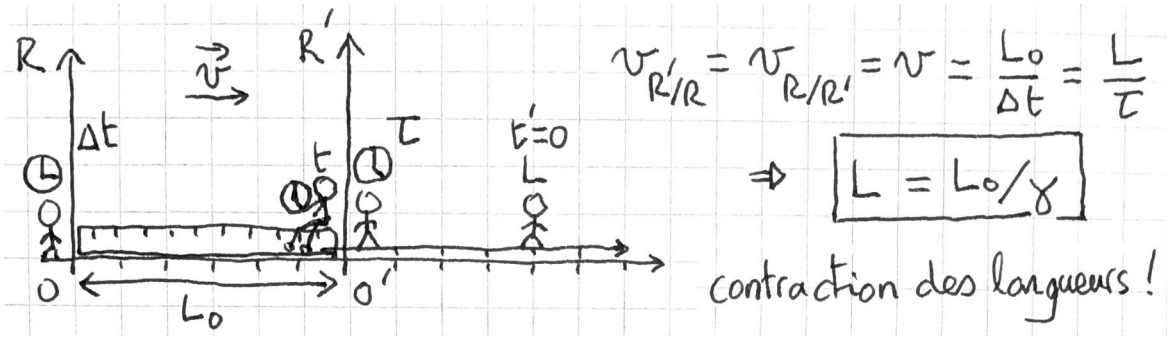
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad \beta = \frac{v}{c} \quad , \quad 0 \leq \beta < 1 \quad , \quad \gamma \geq 1 \quad \text{d'où} \quad \boxed{\Delta t = \gamma\,\tau} \Rightarrow \textbf{dilatation du temps !}$$

Adriana : ... donc un observateur de R voit l'horloge de R' aller plus lentement, et, c'est relatif, celui de R' voit aussi une horloge au repos dans R aller plus lentement.

Mathieu : Oui, la situation est symétrique. Mais non, ce n'est pas ce qui est vu, mais ce qui est mesuré. Nous verrons tout à l'heure les méthodes de mesure des temps et des distances. Ici la dilatation du temps est la même pour des référentiels qui se rapprochent ou s'éloignent. Par contre, pour ce que l'on voit, c'est différent, car il faut tenir compte, en plus, de la propagation de la lumière. Nous verrons ça dans un prochain cours, c'est l'effet Doppler.

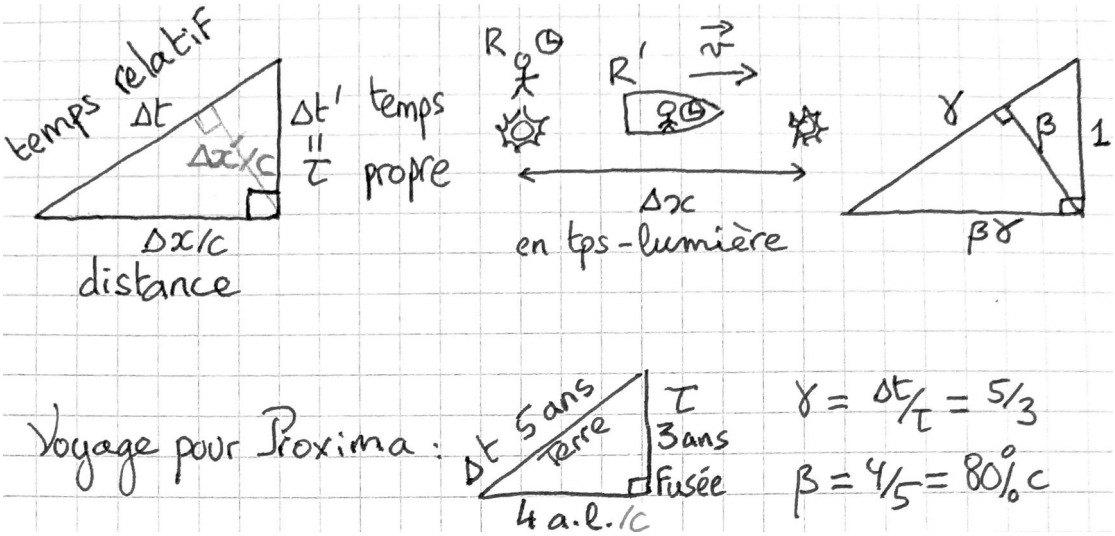
La dilatation du temps peut faire penser à un effet de perspective spatio-temporel. Une analogie, d'où je suis, je peux "tenir" un étudiant au fond de la salle entre mon pouce et l'index, il est tout petit, comme un Schtroumpf ! Mais, lui aussi me voit minuscule, c'est réciproque. Dans ce cas, nous avons un effet de perspective spatial. Et, bien sûr, nous avons en fait tout les deux la même taille, ce n'est qu'une illusion.
Dans le cas de la relativité, c'est plus complexe. Car, contrairement à l'espace, le temps n'est pas isotrope.

Où en étions-nous ? Ah oui ! De plus, la dilatation du temps est associée à une **contraction des longueurs**. Nous considérons une règle au repos dans R, et toujours une horloge au repos dans R' :



Pour mesurer une longueur dans un référentiel donné, il faut repérer la position de chaque extrémité aux mêmes instants.

En s'appuyant sur l'horloge de Pythagore, présentons maintenant le ***triangle des temps*** qui résume ces effets :



Nous sommes prêts pour aborder le ***paradoxe des jumeaux*** : imaginons des jumeaux qui ont 20 ans. L'un reste sur Terre, et l'autre part dans son vaisseau spatial à 80% de *c* pour Proxima du Centaure situé à 4 al. Le jumeau voyageur arrive, sur l'exoplanète *Proxima b*, 3 ans plus tard, alors qu'il s'est écoulé sur Terre 5 ans. Quand il revient sur Terre, il s'écoule à nouveau 3 ans dans le vaisseau et 5 ans sur Terre. Ainsi, lors des retrouvailles, le jumeau voyageur aura 26 ans, alors que le jumeau sédentaire aura 30 ans ! Si l'on imagine la situation symétrique, cela semble paradoxal. Mais l'un subit une accélération pour revenir, contrairement à l'autre. Et finalement, ce n'est pas qu'une simple illusion, un effet de perspective, mais une différence physique et mesurable.

Luna : Ici, la fusée va toujours à la même vitesse, ce qui n'est pas réaliste ! On ne peut pas passer de 0 à 80% de *c* instantanément, encore moins se retourner d'un coup en inversant la vitesse. Pourtant c'est à cause de ces phases accélérées que le voyageur vieillit moins vite, relativement à celui sur Terre. Car tout le reste du temps la situation est symétrique. Pensez-vous qu'il est pensable de construire une telle fusée un jour ?

Mathieu : Oui, excellentes remarques. Pour plus de réalisme, dans un prochain cours, nous considérerons une fusée uniformément accélérée. Le référentiel de la fusée est alors non-inertiel et les postulats d'Einstein ne s'y appliquent pas. La métrique n'y a plus une forme minkowskienne mais de Rindler. Concernant une telle fusée, elle est pensable avec beaucoup de "si". Si on était capable de collecter, de stocker et d'utiliser l'anti-matière de manière efficace, une fusée de la taille d'une *Saturn V* permettrait un voyage jusqu'à *Proxima b* avec une accélération d'un *g*, en 3 ans voyageur et 5 ans terrestre.

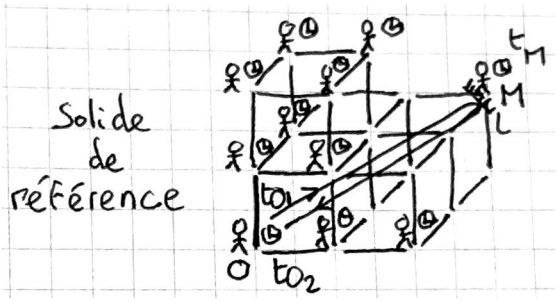
Pour finir aujourd'hui, un point fondamental : donnons la définition d'un **référentiel inertiel** en relativité restreinte, seuls référentiels où les postulats sont vérifiés.

Pour se repérer dans l'espace nous procédons comme en mécanique newtonienne. Nous plaçons des règles unités d'un mètre perpendiculaires les unes aux autres afin de former un réseau qui maille tout l'espace. Nous voulons aussi disposer d'horloges à chaque nœud du réseau, toutes les horloges étant constamment synchronisées. De plus, nous imaginons à chaque nœud un observateur qui note les *événements* se produisant à son niveau à l'aide des étiquettes *(ct, x, y, z)*.
La différence avec la mécanique classique concerne la synchronisation des horloges. Si vous placez toutes les horloges au nœud *O*, les mettez à zéro, et les déplacez ensuite à leurs nœuds respectifs, elles vont se désynchroniser lors du déplacement, car elles auront alors une vitesse non nulle et leur temps va se dilater.

D'où la ***méthode de synchronisation d'Einstein*** : les horloges sont d'abord placées à leurs nœuds. Arbitrairement, nous choisissons l'horloge en O, H_O, comme référence. À la date t_{O1} sur H_O, l'observateur en O émet un rayon lumineux vers une horloge en M à synchroniser, le rayon se réfléchit sur un miroir en M pour retourner en O. Lorsque le rayon se réfléchit, l'observateur en M note la date t_M indiquée par son horloge. Lorsque le rayon revient, O note t_{O2}. O communique à M les valeurs t_{O1} et t_{O2}, et M en déduit le t_M synchronisé.

Par symétrie des trajectoires entre l'aller et le retour (isotropie de l'espace) :

$$(t_M)_{sync} = \frac{t_{O1} + t_{O2}}{2},$$ H_M à avancer de $(t_M)_{sync} - t_M$.



Cristian : Ok, les horloges sont alors initialement synchronisées. Mais qu'est-ce qui nous garantit qu'elles le restent ?

Mathieu : L'homogénéité de l'espace et du temps demandée dans un référentiel inertiel. Aucun point ne doit être privilégié. Par symétrie, il n'y a aucune raison qu'une horloge commence à se comporter différemment des autres.
Un grand avantage de la relativité restreinte est que nous avons une méthode expérimentale qui permet de déterminer si un référentiel est inertiel : une fois synchronisées, les horloges le restent. Si le référentiel est non-inertiel, elles se désynchronisent au cours du temps.
En mécanique newtonienne le temps est absolu, et un référentiel est galiléen (inertiel) si les lois de Newton sont vérifiées. Or, les lois ne sont vérifiées que dans un référentiel galiléen, la définition est cyclique. En mécanique classique, si un objet a une trajectoire courbe, on ne sait pas si c'est à cause de l'action d'une force, ou du caractère non-inertiel du référentiel.
En relativité, on utilise le cristal d'horloge et c'est clarifié.

Quand nous parlons de mesure du temps et des longueurs, c'est par rapport à ce solide de référence et son cristal d'horloges associé. Chaque référentiel dispose d'un ensemble d'observateurs qui ont chacun leur règle et horloge propre. Suite à une expérience, les observateurs rassemblent toutes les données sur les différents événements qu'ils ont collectées pour reconstituer ce qui s'est passé[2].

Considérons, une règle de longueur L_0 et une horloge de période τ, toute deux au repos dans R. Quand un référentiel R' passe à la vitesse $\vec{v}$, un observateur de R' va parfois coïncider avec un observateur de R donné. Par exemple, il y a deux observateurs A_1 et A_2 de R au repos à chaque extrémité de la règle, et dans R', à un même temps t', deux observateurs A'_1 et A'_2 coïncideront avec elles :

pour tout t, $L_0 = A_1 A_2$; même t', $L = A'_1 A'_2 = \sqrt{(x'_{A'_2} - x'_{A'_1})^2 + (y'_{A'_2} - y'_{A'_1})^2 + (z'_{A'_2} - z'_{A'_1})^2}$.

Pour l'horloge, un observateur de R y est constamment au repos, et deux observateurs de R' lui coïnciderons, l'un au début et l'autre à la fin de la période :

même x, $\tau = t_2 - t_1$ (une horloge) ; différents x', $\Delta t' = t'_{A'_2} - t'_{A'_1}$ (deux horloges).

Et c'est selon ces protocoles que nous avons $L = L_0/\gamma$ et $\Delta t' = \gamma \tau$.

Merci à vous pour votre attention.

2 À noter aussi que les horloges au repos sont ainsi synchronisées dans un référentiel inertiel donné, mais elle n'apparaissent pas *a priori* synchronisées par rapport à un autre référentiel où elles sont en mouvement.

Résumé des notions vues aujourd'hui :

Cours 1 - RELATIVITÉ RESTREINTE

- Postulats d'Einstein
- Horloge de Pythagore : Dilatation du temps
- Contraction des longueurs
- Triangle des temps
- Paradoxe des jumeaux
- Définition d'un référentiel inertiel : Méthode de synchronisation d'Einstein

Pour réviser et s'exercer :

- Ce cours reprend le chapitre 1 du livre RR, et vous y avez les exercices 1 à 8 corrigés.

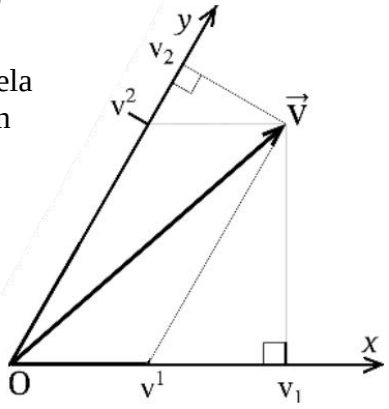
Second cours

Diagrammes de Minkowski

Mathieu : Bonjour.
Nous présentons aujourd'hui un outil graphique proposé en 1908 par Hermann Minkowski.
En relativité, la position dans l'espace-temps est repérée par quatre coordonnées regroupées dans le quadrivecteur position $\widetilde{x}$ de composantes x^{μ} où $\mu = 0,1,2,3$. Ici, l'indice est placé en haut, on dit que l'indice est *contravariant* (ce n'est pas une puissance !).
Dans ce cours nous aurons : $\widetilde{x} = (x^0 = ct,\ x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z)$.
Lorsqu'une particule se déplace dans l'espace-temps, l'ensemble des événements successifs constituent une *ligne d'univers* dans un espace à 4 dimensions d'un référentiel *R*.

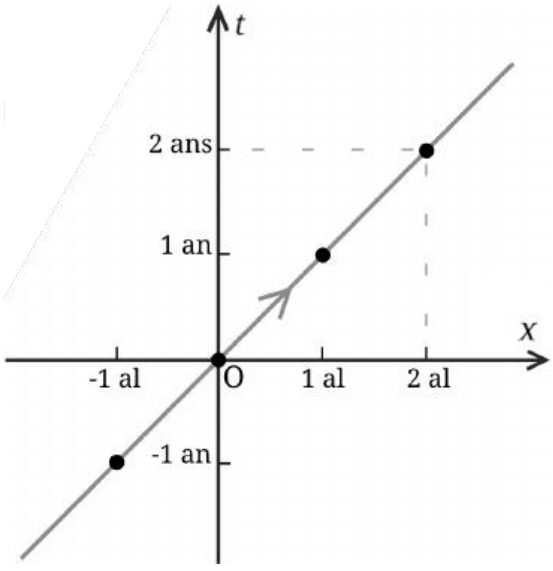
Adriana : ... et si on mettait l'indice en bas, ça changerais quelque chose ?

Mathieu : Pour un vecteur $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$ projeté dans un repère orthogonal cela ne change rien, mais en général c'est différent. Dans un repère non orthogonal, il y a deux possibilités pour projeter un vecteur, les composantes contrariante v^{μ} sont projetées parallèlement aux axes, et les composantes *covariantes* v_{μ} perpendiculairement :



Nous donnerons des explications plus détaillées dans le cours sur les espaces vectoriels.

Donc, un événement est noté *E(ct, x, y ,z)* et dans bien des cas nous pourrons nous limité à un mouvement rectiligne et une seule dimension d'espace : *E(ct, x)*.
Dans un diagramme de Minkowski l'axe du temps *t*, ou *ct*, est toujours selon la verticale. Sur l'axe des *x* les unités de distance sont le temps-lumière. Comme *c* est une constante universelle nous pouvons l'utiliser pour faire correspondre sans ambiguïté un temps à une longueur. Pour les voyages interstellaires, nous choisissons l'année et l'année-lumière.
Un objet immobile en *O* est représenté par une ligne verticale, l'axe du temps, ligne d'univers dirigée vers le haut, pas seulement l'événement *O(0, 0)* à l'origine pour *t=0*.

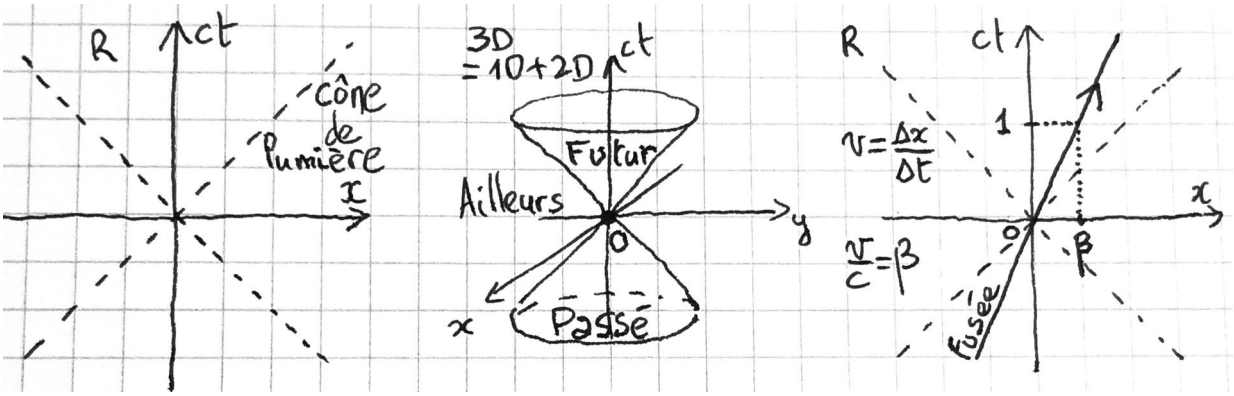


Une impulsion lumineuse qui se dirige vers la droite et en *O* à *t=0*, sera à une a.l. dans un an, et était à *x=-1 al* il y a un an, d'où la ligne d'univers de la lumière représentée en grisée selon la première bissectrice.

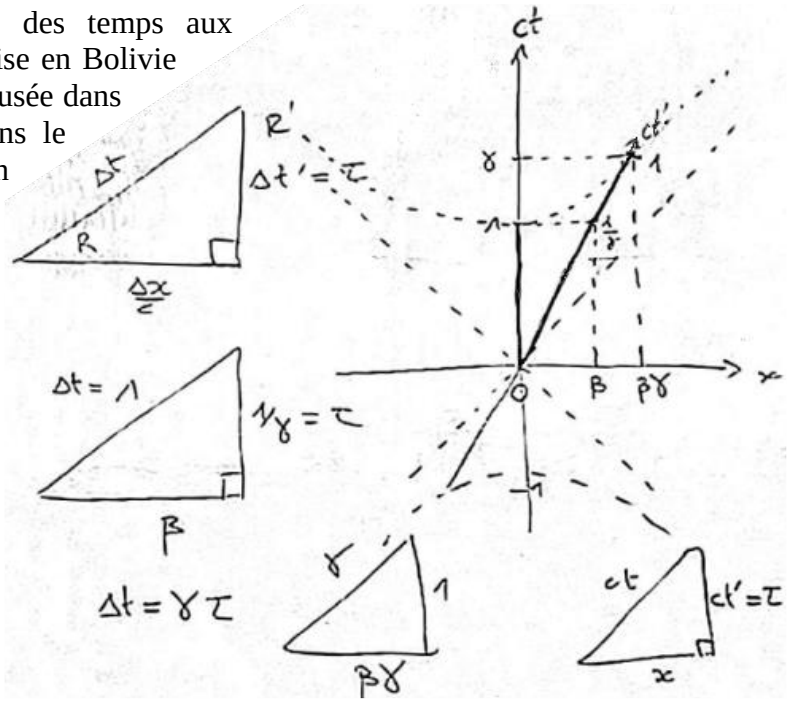
Sur un diagramme d'espace-temps, nous représentons toujours en pointillés les lignes d'univers des rayons lumineux passant par *O*. Ils définissent le *cône de lumière* (page suivante).

Arkaitz : En fait, le cône apparaît seulement en 3D !

Mathieu : Oui ! Et, en général, nous sommes en 4D avec un hypercône !



Sur le schéma de droite, nous voyons la ligne d'univers d'un objet qui se déplace à vitesse constante *v* selon l'axe des *x*. Pour *ct=1*, nous lisons directement sa vitesse β, en pourcentage de *c*. Depuis *O*, tous les points intérieurs au cône peuvent être reliés par une ligne d'univers, par contre, il n'y a aucun lien possible avec ceux à l'extérieur car la vitesse est inférieure à *c*.



Nous pouvons aussi relier le triangle des temps aux diagrammes, ici une photo du tableau prise en Bolivie par un étudiant. La ligne d'univers de la fusée dans *R* correspond à l'axe du temps *t'=τ* dans le référentiel *R'* de la fusée au repos. Et selon le second triangle, nous lisons, dans *R*, *t'=1/γ* quand *t=1*. Et dans le troisième triangle, multiplié par un facteur γ, la dilation du temps apparaît explicitement. Nous avons deux segments de longueur 1, qui semblent de longueurs différentes, selon *ct* ou *ct'* !
La raison est que nous ne sommes pas dans un espace euclidien mais hyperbolique. En effet, d'après le dernier triangle :

$$c^2t^2-x^2=c^2\tau^2$$

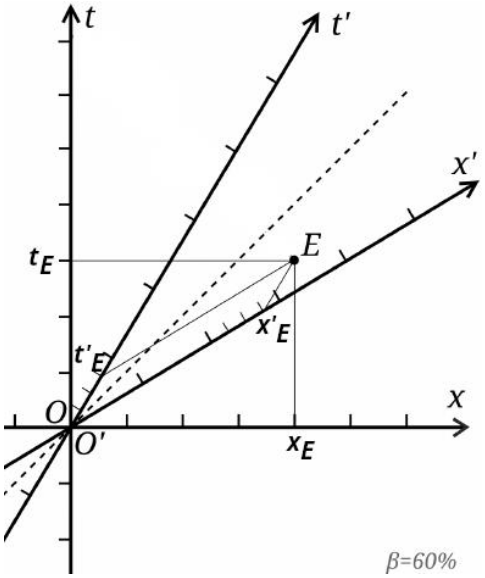
Nous reconnaissons l'équation d'une hyperbole. Ici, l'invariant c'est le temps propre τ, et les courbes de *temps propre* constant sont des hyperboles. En géométrie euclidienne, la longueur est l'invariant, et nous sommes à distance constante sur un cercle : $x^2+y^2=L^2$. Représenter la géométrie euclidienne sur une feuille elle-même euclidienne est plutôt simple, mais une géométrie hyperbolique sur une feuille euclidienne exige d'être attentif.

Adriana : Mais... c'est très étrange ! Les longueurs ne sont pas ce que l'on croit. Et les angles ?

Mathieu : Aussi... Par exemple, pour n'importe quel point *M* de l'hyperbole, la droite *(OM)* est orthogonale localement à l'hyperbole, et pas seulement quand *M* est sur l'axe *ct*. Par analogie en euclidien, le rayon d'un cercle est toujours perpendiculaire au cercle. Nous verrons après comment faire un produit scalaire dans l'espace de Minkowski.

Représentons maintenant l'expérience des jumeaux dans un diagramme (page suivante). Nous raisonnons dans le référentiel galactique où les étoiles sont supposées fixes. La ligne d'univers de notre soleil, et donc du jumeau sur Terre, correspond à l'axe du temps. Celle de Proxima du Centaure lui est parallèle, telle que *x=4 al*. Pour l'aller et le retour du jumeau voyageur, sa ligne d'univers brisée montre clairement l'évolution de son temps propre, il est 4 ans plus jeune que son frère au retour.

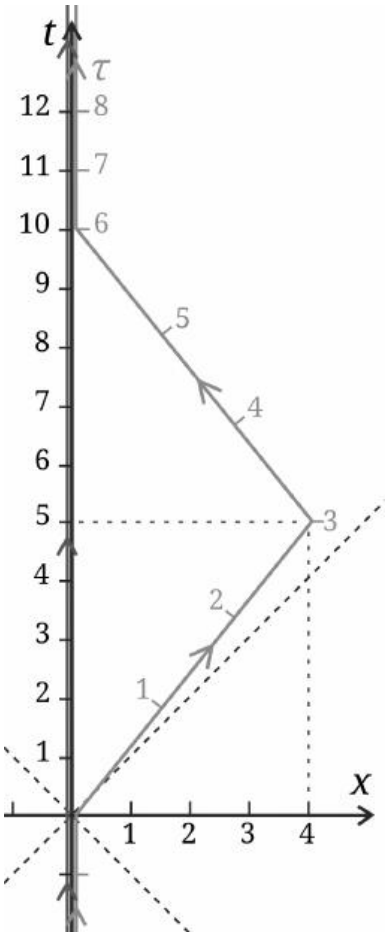
Voyons comment effectuer un ***changement de référentiel***. Pour un référentiel *R'* animé d'une vitesse $\vec{v}=v\,\vec{i}$ par rapport à *R*, l'axe *ct'* correspond à la ligne d'univers de *O'*. Pour l'axe *x'*, nous utilisons l'invariance de la vitesse de la lumière : les axes *x'* et *ct'* doivent être symétriques par rapport au cône de lumière.



$E=(ct_E, x_E)=(ct'_E, x'_E)$

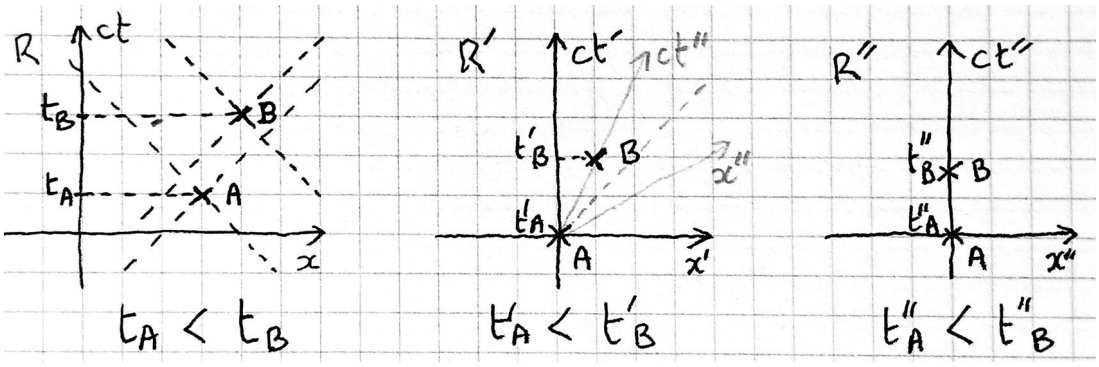
$(3\ ;\ 4)_R=(0{,}75\ ;\ 2{,}75)_{R'}$

Le référentiel *R* est orthonormé. Un regard euclidien, non avertit, pourrait penser que *R'* n'est pas orthogonal. Or , il l'est, deux droites symétriques par rapport aux cônes de lumière sont orthogonales. De plus, si nous visualisons les hyperboles, nous comprenons que la norme est la même.



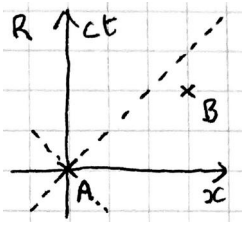
Parlons, maintenant, de ***causalité*** :
Si un événement *A* est avant *B* dans *R*, est-ce vrai dans tous référentiel *R'* ?

Premier cas, *A* et *B* sont dans leurs cônes de lumière respectifs :



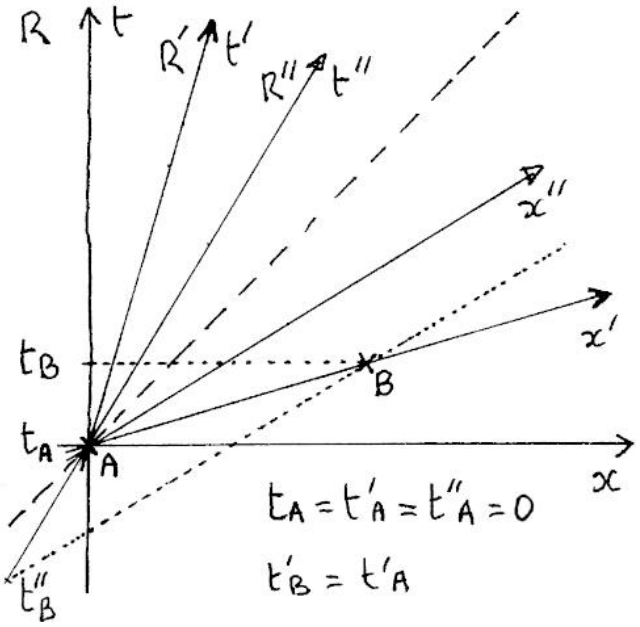
De *R* à *R'*, il s'agit d'une simple translation. Ensuite, nous pouvons toujours effectuer une *transformation de Lorentz* de *R'* à *R''*, telle que *A* et *B* soient au repos. La chronologie est respectée, et l'on peut revenir à un référentiel *R* de n'importe qu'elle vitesse par rapport à *R''*. Aussi dans *R''*, c'est le cas le plus simple pour la mesure des dates, une seule horloge est nécessaire, et l'antériorité de *A* sur *B* est directement mesurée. On a : $\Delta t''_{AB} = \tau < \Delta t'_{AB} = \Delta t_{AB}$, où le temps propre τ est la durée minimale.

Deuxième cas, *A* et *B* ne sont pas dans leurs cônes :
Dans *R*, *A* est avant *B* car $t_B > t_A$.
Impossible dans ce cas de trouver un référentiel où *A* et *B* sont au repos, car il n'existe pas de ligne d'univers reliant les deux événements.
Dans *R'*, tel que *x'=(AB)*, voir page suivante, *A* et *B* sont simultanés !
Dans *R''*, *A* est après *B* !
Mais quelque soit le référentiel, *B* est en dehors du cône de *A*, et n'a aucun lien causal avec lui.

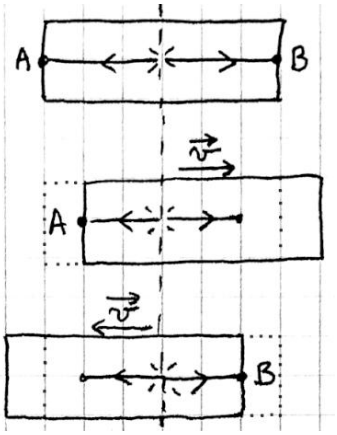


Conclusion, quand deux événements ont un lien possible de cause à effet, la chronologie est respectée pour tout observateur, et le *principe de causalité* est donc vérifiée.
Quand deux événement ne peuvent influer l'un sur l'autre, peut importe que l'un soit avant l'autre, ou qu'ils soient simultanés. La chronologie dépend alors de l'observateur et cela n'a aucune conséquence sur la vie réelle. Ils n'ont pas de lien causal, le principe de causalité (conservation du sens du lien causal) n'a donc pas à être vérifié.

Ainsi, en relativité, la causalité est tout aussi rigoureusement vérifiée qu'en mécanique newtonienne. Et le fait que le temps et la simultanéité soient relatifs n'y change rien.



Luna : Je me souviens de l'exemple où un flash lumineux est émis au milieu d'un wagon, les rayons lumineux arrivent aux deux extrémités du wagon en même temps. Mais, si le wagon bouge vers la droite, comme la vitesse de la lumière est constante, le rayon de gauche arrive en premier. Et s'il bouge vers la gauche, c'est celui de droite. L'ordre des événements change !



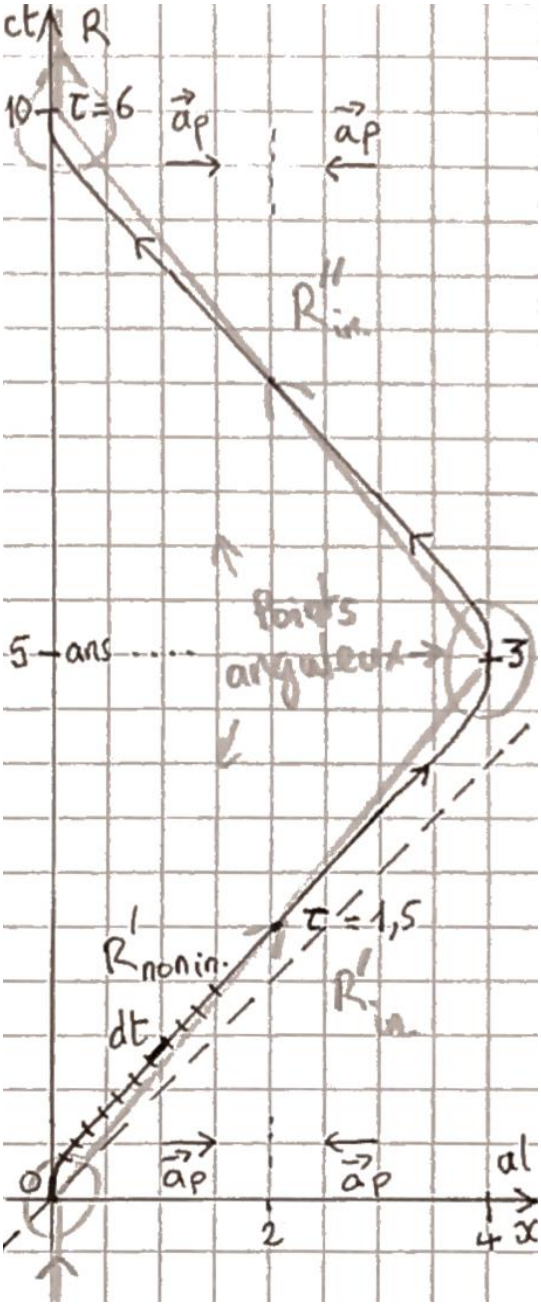
Mathieu : Oui, bonne exemple. Alors qu'en mécanique classique la simultanéité serait vérifiée dans tout les référentiels, par additivité des vitesses un rayon irait à *c*-*v* et l'autre à *c*+*v* compensant le mouvement du wagon.

Pour finir aujourd'hui, revenons au paradoxe des jumeaux.
Pour plus de réalisme, nous remplaçons la ligne brisée avec des points anguleux non-physiques, par une courbe avec des variations douces (page suivante). La fusée effectue un mouvement rectiligne à accélération propre $\vec{a}_p$ constante, et se retourne à mi-chemin pour arriver sur Proxima à vitesse nulle. Les voyageurs ressentent une gravité artificielle $\vec{g} = -\vec{a}_p$. Le référentiel *R*' de la fusée est non-inertiel, néanmoins à chaque instant, nous pouvons faire coïncider une deuxième fusée inertiel de même vitesse $\vec{v}$ et d'accélération nulle. Pendant un petite durée, tant que les fusées seront globalement immobiles l'une par rapport à l'autre, les horloges des deux fusées iront au même rythme. Ces idées qui permettent de traiter les référentiels non-inertiels en relativité restreinte sont résumées dans les deux nouveaux postulats suivants :

3. *Principe d'équivalence* : Localement, en tout point d'un espace-temps, il existe toujours un référentiel inertiel coïncidant.

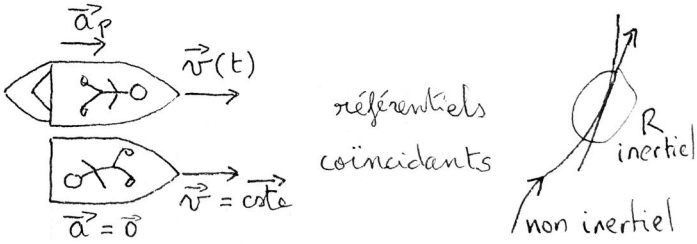
Ce référentiel est localement minkowskien.

4. *Hypothèse de l'horloge* : Deux horloges qui coïncident avec la même vitesse, auront la même dilatation temporelle, quelque soient leurs accélérations ou rotations.



Nous pouvons calculer le temps écoulé dans la fusée à partir du référentiel *R*. Sur une ligne d'univers :

$$dt = \gamma\, d\tau \qquad \text{et} \qquad \tau = \int d\tau = \int \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, dt$$

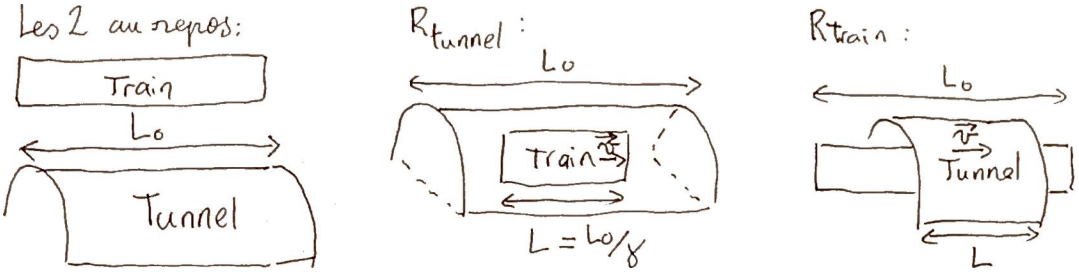


Cristian : Ces nouveaux postulats resteront-ils vrais en relativité générale ?

Mathieu : Oui. Et pour la gravitation, nous compléterons ces quatre postulats en ajoutant l'*équation d'Einstein* qui relie la *métrique* au *tenseur énergie-impulsion*.

La formule pour τ nous montre comment, du point de vue de l'observateur terrestre, le voyageur vieillit plus lentement que lui. $d\tau$ est d'autant plus faible par rapport à dt que v est grand. Sur la ligne d'univers du mouvement accéléré, c'est principalement en dehors des zones des points anguleux que le ralentissement du vieillissement par rapport à la Terre est plus important.

Ah, mais puisqu'il nous reste quelques minutes, nous pouvons finir par un joli paradoxe, avec un train relativiste qui traverse un tunnel. Le train comme le tunnel ont une longueur au repos $L_0 = 1000\ m$. Supposons le tunnel au repos et un train qui arrive avec un γ de 2. Le train contracté d'un facteur 2 rentre aisément dans le tunnel. Nous pouvons même fermer en même temps les portes aux extrémités du tunnel pour enfermer le train pendant une microseconde !
Qu'en est-il du point de vu du train au repos ? C'est au tour du tunnel d'être contracté d'un facteur 2, et impossible d'y faire rentrer le train...
Comment sortir de cette apparente contradiction ?



Résumé des notions vues aujourd'hui :

Cours 2 - DIAGRAMMES DE MINKOWSKI

- Événement et ligne d'univers
- Cône de lumière et espace hyperbolique
- Changement de référentiel
- Principe de causalité
- Relativité de la simultanéité
- Retour sur le paradoxe des jumeaux
- Hypothèse de l'horloge
- Principe d'équivalence
- Paradoxes avec un train

Pour réviser et s'exercer :

- Chapitre 2 du livre RR, exercices 1 à 4 corrigés, et chapitre 3.
- Une feuille d'exercices suit.
- Représenter le paradoxe du flash lumineux émis au milieu d'un wagon, puis celui du train et du tunnel, avec des diagrammes de Minkowski.

Feuille d’exercices n°1

Dilatation du temps et diagrammes d'espace-temps

Exercice 1

En l'année galactique 2125, vous entreprenez un voyage Soleil-Sirius pour étudier un système binaire.
Après 8 ans dans votre vaisseau spatial, vous atterrissez sur une exoplanète autour de Sirius A.
En quelle année galactique sommes-nous alors, et quelle était la vitesse de votre vaisseau ?
En 2128, trois ans après votre départ, les terriens vous envoient un message radio.
Quand recevrez-vous ce message ?
Quand vous arrivez sur la planète, vous envoyez une photo de votre nouvelle maison.
Quand la recevront-ils ?
Tracez un diagramme de Minkowski qui montre les différentes lignes d'univers.

Distance Soleil-Sirius dans le référentiel galactique: 9 al.

Exercice 2

Carlos, âgé de 40 ans, doit voyager, pour une mission secrète jusqu'à l'étoile *Kappa Ceti* située à 30 al dans la constellation de *Cetus*. Le vaisseau de Carlos est un modèle β95. Quand il part, sa fille Maria a 15 ans. À l'aide d'une onde électromagnétique, Maria envoie une lettre chaque mois à son père.
Combien de lettres Carlos reçoit durant son voyage aller pour *Kappa Ceti* ?
Arrivé à *Kappa Ceti*, Carlos entreprend de suite le retour vers le Soleil. Tracez le diagramme.
Quand ils se retrouvent, quels âges ont la fille et son père ?

modèle β95: $\beta=3/\sqrt{10}$

Exercice 3

Au Japon, le Shinkansen met 3 heures pour aller de Tokyo à Shin-Aomori situé à 675 km. Au début à Tokyo, deux horloges atomiques sont synchronisées. L'une reste à la station, et l'autre fait l'aller-retour en train. De retour à Tokyo, quelle est la désynchronisation entre les deux horloges ?
Est-ce mesurable ? Les horloges atomiques ont une précision de 0,5 ns/jours.

Le référentiel terrestre est supposé inertiel.

Exercice 4

Un avion vol autour de la Terre en suivant l'équateur en direction de l'Est. Il couvre 40 000 km à 1000 km/h par rapport au sol. Au début, les deux horloges au repos sont synchronisées. Une reste sur le sol, l'autre fait le tour du monde dans l'avion. De retour au point de départ, quelle est la désynchronisation entre les deux horloges ? Qu'en serait-il si l'avion voyageait vers l'Ouest ?

Les variations d'altitude sont ignorées. Le référentiel géocentrique est considéré inertiel.

Exercice 5

Quelle est la probabilité pour un muon créé à 15 km d'altitude avec une vitesse verticale de 0,995c d'atteindre le niveau de la mer ? Chacaltaya, 5240m?

Durée de vie moyenne du muon au repos : 2,2 µs

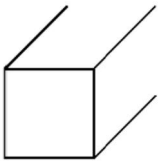
Cours 3

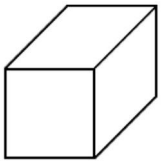
Espace vectoriel

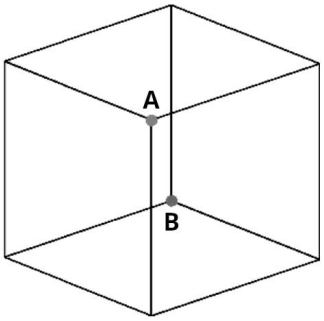
Mathieu : Bonjour.
Parlons d'abord des dimensions. Sur un tableau, objet de dimensions 2D, il est aisé de dessiner un carré :



Mais impossible *a priori* de dessiner un objet 3D, comme par exemple un cube.
De surcroît, nos yeux ne voient aussi que la 2D, deux images 2D décalées sur chacune de nos rétines sont interprétées comme un volume. Une conceptualisations très utile, construite depuis tout petit. Par exemple, nous pouvons représenter un cube ainsi sur une feuille 2D :

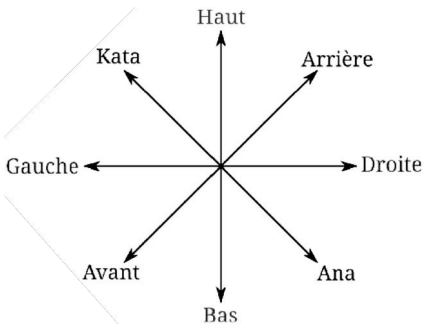


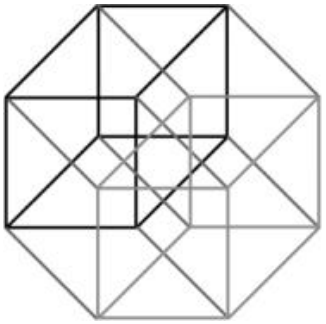


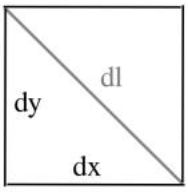


C'est une astuce, car l'objet est fondamentalement plat, c'est notre cerveau qui construit un objet tridimensionnel. Avec quelques ambiguïtés, par exemple, quel point est devant ? Le *A* ou le *B* ?

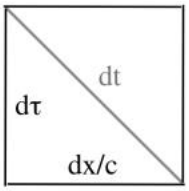
Mais si notre cerveau construit la 3D, pourquoi ne pas aussi s'exercer à "voir" un objet 4D ?
De la même manière que l'on a codé une troisième dimension, nous pouvons en ajouté une quatrième. Nous obtenons ainsi un hypercube, objet à 4 dimensions spatiales, sur une feuille 2D.
Nous comparons ci-dessous l'espace 3D d'Euclide avec l'espace-temps 4D de Minkowski :





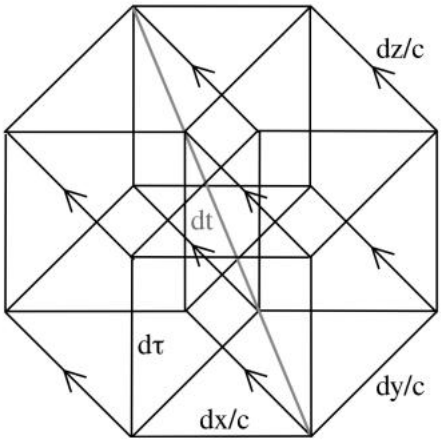


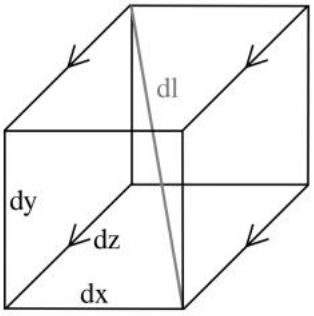
$dl^2=dx^2+dy^2$



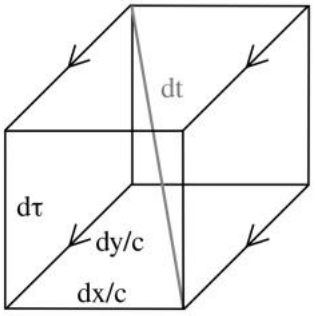
$d\tau^2=dt^2-dx^2/c^2$

Hypercube
spatio-temporel





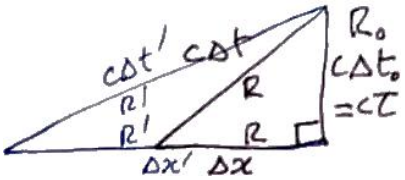
$dl^2=dx^2+dy^2+dz^2$

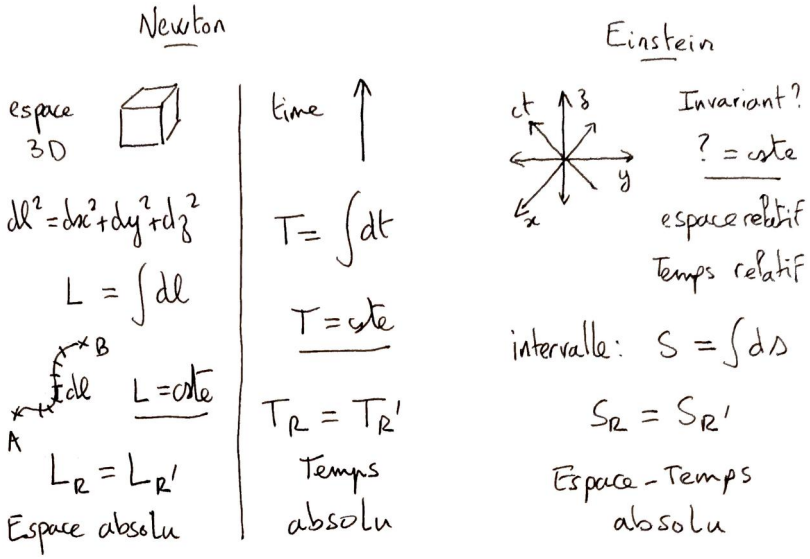


$d\tau^2=dt^2-dx^2/c^2-dy^2/c^2$

$d\tau^2=dt^2-dx^2/c^2-dy^2/c^2-dz^2/c^2$

Chez Newton, le Temps et l'Espace sont séparés, et, indépendamment, les longueurs et les durées sont invariantes quand nous passons d'un référentiel à l'autre.
En relativité, ces grandeurs changent d'un référentiel à l'autre.
Qu'elle est l'invariant dans un Espace-temps absolu ?





De manière analogue à l'espace euclidien, nous avons une grandeur qui ne varie pas quand l'on change de référentiel inertiel : $c^2\tau^2 = c^2\Delta t^2-\Delta x^2 = c^2\Delta t'^2-\Delta x'^2$. Le temps propre est un invariant, ou l'intervalle d'espace-temps *s*, homogène à une distance :

$$d s^2=c^2 d t^2-d x^2-d y^2-d z^2=c^2 d \tau^2=d s'^2.$$

Arkaitz : Excusez-moi, mais dans notre cours en licence, je crois qu'on avait $d s^2=-c^2 d \tau^2$.

Mathieu : Cela dépend de la signature choisie, selon l'enseignant ou le livre. Ici, on a pris les signes (+ - - -). D'autres auteurs prennent la signature (+ + + -), avec le moins pour le temps. Aussi, pour la position d'un événement nous choisirons les indices 0, 1, 2 et 3 : $x^\mu=(x^0=ct\,,\ x^1=x\,,\ x^2=y\,,\ x^3=z)$.
D'autres prennent les indices 1, 2, 3, 4, avec 4 pour le temps. De plus, nous choisissons les indices grecs pour désigner les quatre indices qui courent sur l'espace-temps, et les indices latins, comme *i, j, k*... pour les trois indices spatiaux.

Avec ces notations, nous avons : $d s^2=(d x^0)^2-(d x^1)^2-(d x^2)^2-(d x^3)^2$,

$$\text{soit :}\quad d s^2=\eta_{00} d x^0 d x^0+\sum_{i=1}^{3}\eta_{ii} d x^i d x^i=\sum_{\mu\nu}\eta_{\mu\nu} d x^\mu d x^\nu \quad \text{et finalement} \quad d s^2=\eta_{\mu\nu} d x^\mu d x^\nu.$$

Pour la dernière expression nous avons utilisé la ***convention d'Einstein*** : le même indice, répété en haut et en bas, sous-entend une sommation.
Les quadrivecteurs, tenseurs de rang 1, x^μ et dx^μ sont contravariants, et le tenseur de rang 2, $\eta_{\mu\nu}$, est doublement covariant.
Ce type de relation tensorielle est très pratique en relativité non-inertielle. Dans le cas particulier de la relativité inertielle, dans un système de coordonnées cartésiennes orthonormées, nous avons simplement $\eta_{00}=1$ et $\eta_{ii}=-1$, soit la métrique sous forme matricielle :

$$\eta_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix},$$ appelée *métrique de Minkowski* (désignée par la lettre η).

Calculs tensoriels : commençons par le cas de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, $x^i=(x^1,\ x^2,\ x^3)=(x\,,\ y\,,\ z)$.

Vecteur projeté sur une base covariante : $\vec{x}=x^1\vec{e}_1+x^2\vec{e}_2+x^3\vec{e}_3=\sum_{i=1}^{3}x^i\vec{e}_i=x^i\vec{e}_i=x^j\vec{e}_j$ (indice muet).

Produit scalaire : $\vec{x}\cdot\vec{y}=x^i\vec{e}_i\cdot y^j\vec{e}_j=g_{ij}x^i y^j=x^i y_i=x_j y^j$, où nous avons défini la ***métrique*** :

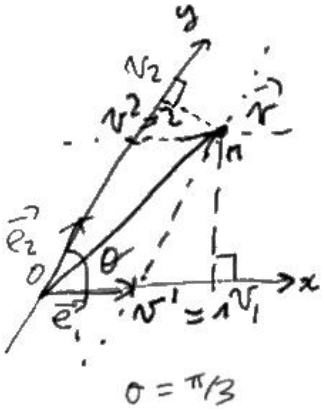
$$g_{ij}=\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ \textit{tenseur symétrique}:\ g_{ij}=g_{ji}.$$

Nous obtenons une matrice identité dans une base orthonormée.

La métrique covariante permet de descendre les indices : $x_i=g_{ij}x^j$, ici $x_i=x^i$, mais en général $x_i\neq x^i$.

Par exemple : $dl^2=\vec{dl}\cdot\vec{dl}=dx^i\vec{e}_i\cdot dx^j\vec{e}_j=g_{ij}dx^i dx^j=dx_k dx^k=dx^2+dy^2+dz^2$, distance euclidienne.

Espace vectoriel **:** cas d'une base euclidienne non-orthogonale. Étude sur un exemple.



Nous avons : $\overrightarrow{OM}=\vec{v}=v^1\vec{e}_1+v^2\vec{e}_2=v^i\vec{e}_i=\vec{e}_1+2\vec{e}_2$

(composantes contravariantes par projection sur une base covariante).

Nous obtenons ici la métrique : $g_{ij}=\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=\begin{pmatrix}1&\cos\theta\\\cos\theta&1\end{pmatrix}$

Or, $v_i=g_{ij}v^j$ d'où $v_1=g_{11}v^1+g_{12}v^2=1+\frac{1}{2}.2=2$ et $v_2=g_{21}v^1+g_{22}v^2=\frac{5}{2}$.

La ***métrique contravariante*** est définie par la relation : $g_{ik}g^{kj}=\delta_i^j$.

Soit quatre équations : $g_{11}g^{11}+g_{12}g^{21}=1,\ g_{11}g^{12}+g_{12}g^{22}=0$, etc.

On résout le système : $g^{ij}=\frac{1}{\sin^2\theta}\begin{pmatrix}1&-\cos\theta\\-\cos\theta&1\end{pmatrix}$.

Pour monter les indices : $v^i=g^{ij}v_j$ et $\vec{e}^i=g^{ij}\vec{e}_j$.

Nous pouvons aussi exprimer un vecteur dans sa base contravariante :

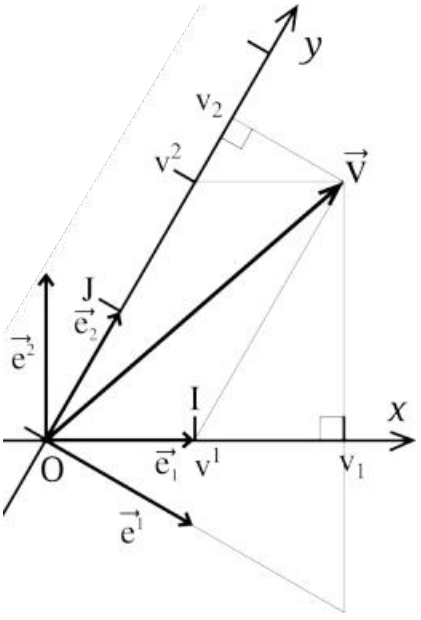
$$\vec{v}=v^i\vec{e}_i=v_i\vec{e}^i=2\vec{e}^1+\frac{5}{2}\vec{e}^2$$

avec $\vec{e}^1=g^{11}\vec{e}_1+g^{12}\vec{e}_2=\frac{2}{3}(2\vec{e}_1-\vec{e}_2)$ et $\vec{e}^2=\frac{2}{3}(-\vec{e}_1+2\vec{e}_2)$.

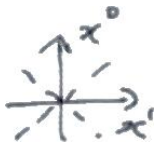
Nous pouvons aussi, grâce à la métrique, calculer la norme du vecteur $\vec{v}$:

$$\vec{v}\cdot\vec{v}=\|\vec{v}\|^2=g_{ij}v^i v^j=(v^1)^2+(v^2)^2+\cos\theta\, v^1v^2+\cos\theta\, v^2v^1$$

et $v=\sqrt{5+4\cos\theta}$.



Espace de Minkowski : cas d'une base orthonormée dans *R* inertiel. *E(ct, x)* :



Base orthogonale : $g_{01}=\eta_{01}=\tilde{e_0}\cdot\tilde{e_1}=0,$

un tilde $\sim$ est choisi pour un vecteur de l'espace de Minkowski, une flèche $\rightarrow$ dans l'espace euclidien.

Base normée : $\eta_{00}=\tilde{e_0}\cdot\tilde{e_0}=1$ et $\eta_{11}=\tilde{e_1}\cdot\tilde{e_1}=-1$

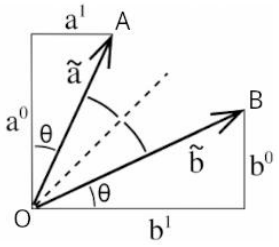
Soit deux quadrivecteurs $\tilde{a}$ et $\tilde{b}$: $\tilde{a}=(a_0,a_1,a_2,a_3)=(a_0,\vec{a})$ $\tilde{b}=(b_0,\vec{b})$

En 2D : $\tilde{a}.\tilde{b}=g_{\mu\nu}a^\mu b^\nu=\eta_{00}a^0b^0+\eta_{11}a^1b^1$

$\tilde{a}.\tilde{b}=a^0b^0-a^1b^1$

Deux 4-vecteurs orthogonaux sont symétriques par rapport aux lignes d'univers des photons :

$\tilde{a}\cdot\tilde{b}=0 \quad\Rightarrow\quad a^0b^0=a^1b^1 \qquad \tan\theta=\dfrac{a^1}{a^0}=\dfrac{b^0}{b^1}$



Au sens de l'espace de Minkowski, OAB est un triangle rectangle en O.

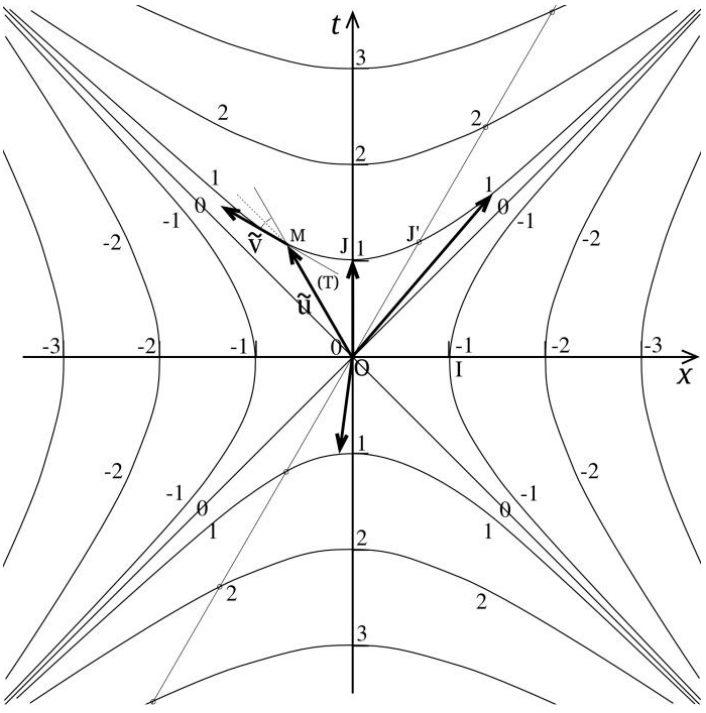
Considérons maintenant un autre référentiel *R'* en mouvement par rapport à *R* :

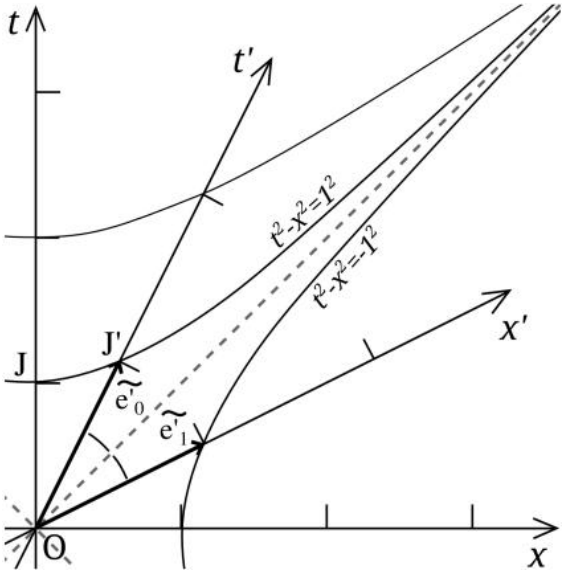
$\eta'_{01}=\eta_{01}=\tilde{e'}_0\cdot\tilde{e'}_1=0$, la base de *R'* est orthogonale,

$\eta'_{00}=\eta_{00}=\tilde{e'}_0\cdot\tilde{e'}_0=1$ et $\eta'_{11}=\eta_{11}=\tilde{e'}_1\cdot\tilde{e'}_1=-1,$

la base de *R'* est normée.

Du point de vue de minkowski : *OJ* = *OJ'*.





Avec ou sans primes :

$$\eta'_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\eta'^{\mu\nu}$$

$x'_0=x'^0,\quad x'_1=-x'^1,$

$\tilde{e}'^0=\tilde{e}'_0 \quad$ et $\quad\tilde{e}'^1=-\tilde{e}'_1.$

Sur la figure à gauche : $\tilde{u}\cdot\tilde{v}=0.$

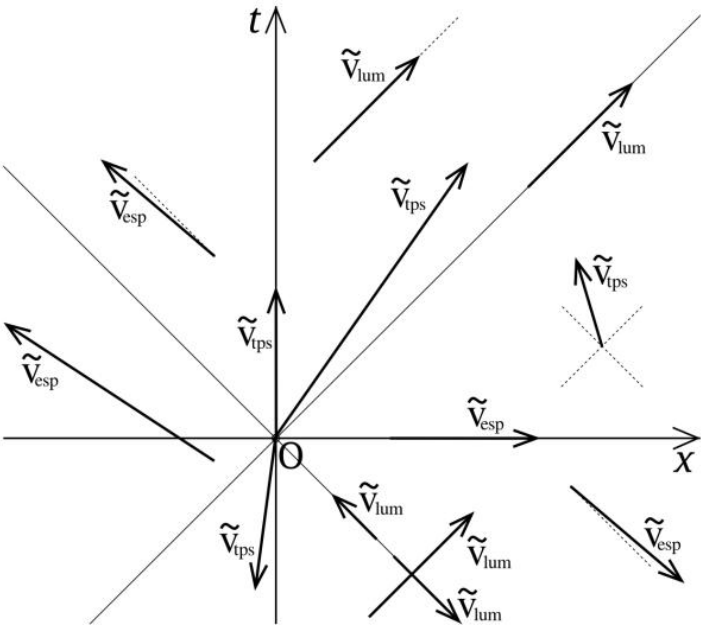
La ***pseudonorme***, $\widetilde{v}\cdot\widetilde{v}=(v^0)^2-(v^1)^2$, est positive, nulle ou négative.

Quadrivecteur $\widetilde{v}$ de

- genre temps : $\widetilde{v}\cdot\widetilde{v}>0$
- genre lumière : $\widetilde{v}\cdot\widetilde{v}=0$
- genre espace : $\widetilde{v}\cdot\widetilde{v}<0$

Suivant le signe de la composante temporelle, un quadrivecteur peut pointer vers le futur ou le passé.

Le temps propre, le produit scalaire, l'orthogonalité, la pseudonorme, le genre, et le signe de la composante temporelle, sont des grandeurs ou propriétés invariantes par changement de référentiel.



Pour résumé, en relativité restreinte ou générale,
un quadrivecteur peut s'écrire selon deux jeux de composantes, contravariantes ou covariantes :

$$\widetilde{v}=v^\mu\widetilde{e}_\mu=v_\mu\widetilde{e^\mu}.$$

Le tenseur métrique est défini par $g_{\mu\nu}=\widetilde{e}_\mu\cdot\widetilde{e}_\nu$.

Pour le produit scalaire nous avons : $\widetilde{a}\cdot\widetilde{b}=g_{\mu\nu}a^\mu b^\nu=a^\mu b_\mu=a_\mu b^\mu=g^{\mu\nu}a_\mu b_\nu$.

Le tenseur métrique permet de bouger les indices, par exemple : $\widetilde{e}_\mu\cdot\widetilde{e^\nu}=\widetilde{e}_\mu\cdot g^{\nu\lambda}\widetilde{e}_\lambda=g_{\mu\lambda}g^{\lambda\nu}=\delta_\mu^\nu$.

Adriana : Est-ce que les diagrammes de Minkowski sont aussi utilisés en relativité générale ?

Mathieu : Oui, mais l'interprétation est moins immédiate. Déjà, pour la simple raison que l'on ne peut pas synchroniser les horloges dans un référentiel non-inertiel. Impossible donc, *a priori*, de définir un temps *t* ! Comme on ne peut pas utiliser les horloges propres, on utilise des *horloges coordonnée*. En fait, nous pouvons continuer à synchroniser des horloges, mais celles-ci ne vont pas au même rythme que les horloges propres... Localement nous avons maintenant deux horloges, l'une *propre* et l'autre *coordonnée*. Ça peut sembler artificiel, car selon le point de l'espace considéré, une horloge coordonnée peut aller plus, ou moins, vite que l'horloge propre. Ceci dit, nous pouvons ainsi étiqueter tous les événements de notre référentiel non-inertiel, définir un "temps", et, en déduire au final le temps propre. Déduite de ce *temps coordonnée*, nous avons aussi une *vitesse coordonnée*. Et bien que localement, dans notre référentiel minkowskien, par rapport à l'horloge propre, la vitesse de la lumière vaut toujours *c*, la vitesse coordonnée de la lumière, elle, pourra donc être inférieure, ou supérieure, à *c*. Et les cônes de lumière seront plus ou moins écrasés, ou allongés, en différents points du diagramme.

Résumé des notions vues aujourd'hui :

Cours 3 - ESPACE VECTORIEL

- Dimensions d'espace-temps
- Le temps propre comme invariant
- Convention d'Einstein
- La métrique covariante : $ds^2 = c^2 d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$
- composantes et bases, contravariantes et covariantes
- La métrique contravariante : $g_{\mu\lambda} g^{\lambda\nu} = \delta_\mu^\nu$
- descendre et monter les indices : $v_\nu = g_{\nu\mu} v^\mu$ et $v^\nu = g^{\nu\mu} v_\mu$
- Orthogonalité dans l'espace de Minkowski
- Pseudonorme et genre

Pour réviser et s'exercer :

- Chapitre 7 du livre RR pages 173 à 198.
- Feuille d'exercices sur le calcul tensoriel page 30 : exercice 1

Cours 4

Changement de coordonnées

Mathieu : Bonjour.

Question : Quelle serait la plus belle théorie physique ?

Une idée : une théorie vraie dans tous les référentiels, invariante par changement de coordonnées, vraie pour tout observateur, quelque soit sa situation les lois de la physique s'exprimeraient de la même manière.

Comme nous allons le voir aujourd'hui, c'est justement que l'on peut réaliser avec des tenseurs à 4 dimensions.

Tout d'abord, qu'en est-il des théories que nous connaissons déjà ?

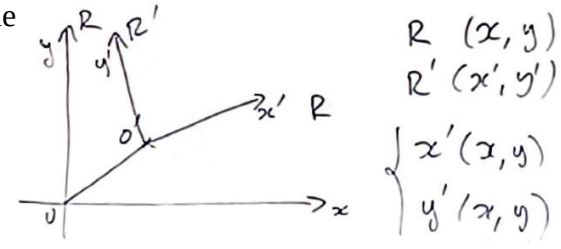
En mécanique de Newton et physique quantique, si l'on ne tient pas compte du temps, les lois sont invariantes. Par translation, ce qui revient à simplement changer l'origine, et par rotation des axes. C'est normal car nous avons dans $\mathbb{R}^3$ des relations vectoriels ou scalaires, comme $\vec{F}=m\vec{a}$ ou $d(1/2\,m\vec{v}\cdot\vec{v})/dt=\vec{F}\cdot\vec{v}$, les composantes des vecteurs changent, mais les relations entre les vecteurs, ou leurs produits scalaires, restent les mêmes. En ajoutant maintenant le temps, nous avons invariance par translation temporelle, on peut changer l'origine des temps, et nous pouvons effectuer une transformation de Galilée. Mais, toutes autres transformations ne laisse pas les lois invariantes : $\vec{v}_{R'/R}=\vec{v}(t)$, $\vec{\Omega}_{R'/R}(t)$ et $\vec{a}_{R'/R}$.
En relativité restreinte, et donc aussi en électromagnétisme, nous prenons la transformation de Lorentz, mais nous faisons le même constat.

L'idée est finalement assez simple si le temps devient une coordonnée, au côté des trois d'espace, nous pouvons construire des scalaires, vecteurs et tenseurs à 4 dimensions, d'où invariance des lois qui relient ces quantités. De la même manière qu'en mécanique classique en 3D. Sauf que nous étions limités, car nous établissions des lois avec des objets 3D dans un monde à 4D.

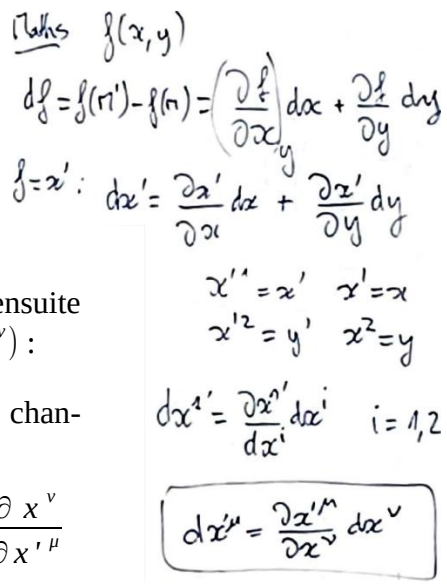
Luna : Mais, dans ce cas, ça devrait déjà fonctionner en relativité restreinte ?

Mathieu : Oui, c'est en effet le cas en remplaçant les dérivées par des *dérivées covariantes*.
Nous les étudierons plus tard.

Commençons par regarder ce qui se passe en 2D lorsque l'on passe d'un système de coordonnées à l'autre :



Un peu de maths permet d'obtenir le changement pour un élément infinitésimal :



Nous généralisons ensuite la formule pour $x'^{\mu}(x^{\nu})$:

Matrices lambda de changement de base :

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu}=\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \qquad \Lambda_{\mu}{}^{\nu}=\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}}$$

Pour un vecteur infinitésimal :

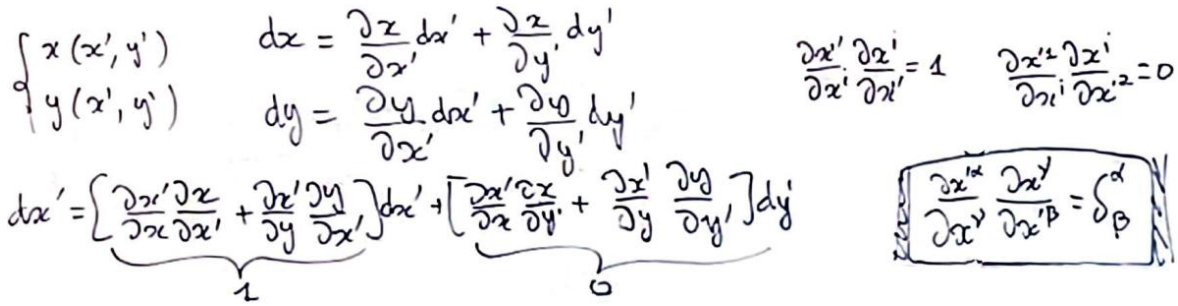
$$d\tilde{x}=dx^{\mu}\,\tilde{e}_{\mu}=dx'^{\mu}\,\tilde{e}'_{\mu}$$

avec $dx'^{\mu}=\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\,dx^{\nu}$ et $\tilde{e}'_{\mu}=\Lambda_{\mu}{}^{\nu}\tilde{e}_{\nu}$.

De même, pour tout vecteur :

$$v'^{\mu}=\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\,v^{\nu}$$

Avant de continuer, nous avons une formule utile à démontrer :



Reprenons, donc, nous avons les changements de coordonnées suivants :

4-vecteurs : $v'^{\mu}=\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right)v^{\nu}$ $\qquad$ $v'_{\mu}=\left(\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}}\right)v_{\nu}$

Tenseurs de rang 2 : $T'^{\mu\nu}=\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\right)\left(\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}}\right)T^{\alpha\beta}$ $\qquad$ $T'_{\mu\nu}=\left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\right)\left(\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}}\right)T_{\alpha\beta}$

Corollaire : | *Un tenseur identiquement nul dans un référentiel, l'est aussi dans tout autre référentiel.* |

Composantes d'un tenseur : $\boldsymbol{T}=T^{\mu\nu}\widetilde{e}_{\mu}\otimes\widetilde{e}_{\nu}=T_{\mu\nu}\widetilde{e^{\mu}}\otimes\widetilde{e^{\nu}}=T^{\mu}{}_{\nu}\widetilde{e}_{\mu}\otimes\widetilde{e^{\nu}}=T_{\mu}{}^{\nu}\widetilde{e^{\mu}}\otimes\widetilde{e}_{\nu}$ ($\otimes$: produit tensoriel)

Nous pouvons généraliser pour un tenseur de n'importe quel rang avec tous type d'indices covariants ou contravariant. Si nous avons une relation entre des grandeurs physiques dans un référentiel, elle est aussi vraie dans tout autre référentiel, par exemple :

$$a^{\mu}{}_{\nu}=b^{\mu}c_{\nu}\quad\Rightarrow\quad\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\right)\left(\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}}\right)a^{\alpha}{}_{\beta}=\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\right)b^{\alpha}\left(\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}}\right)c_{\beta}\quad\Rightarrow\quad a'^{\mu}{}_{\nu}=b'^{\mu}c'_{\nu}$$

Scalaires : $T_{\mu}{}^{\cdot\,\mu}=T'_{\mu}{}^{\cdot\,\mu}=T=T'$ $\qquad$ $T_{\mu\nu}T^{\mu\nu}=T'_{\mu\nu}T'^{\mu\nu}=S=S'$

$R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu}=S$ (scalaire de Kreschmann construit avec le tenseur de courbure de Riemann)

Prenons le cas du scalaire de deux quadrivecteurs pour la démonstration :

$$\widetilde{u}\cdot\widetilde{v}=u^{\mu}v_{\mu}=u'^{\mu}v'_{\mu}=invariant,\quad\text{en effet}\quad u'^{\mu}v'_{\mu}=\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}}\right)u^{\lambda}\left(\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}}\right)v_{\sigma}=\delta^{\sigma}_{\lambda}u^{\lambda}v_{\sigma}=u^{\mu}v_{\mu}.$$

Pour la relativité restreinte inertielle, nous ne considérons que les changements de référentiels qui laissent la métrique de Minkowski invariante entre deux systèmes de coordonnées cartésiens orthonormés *(O, ct, x, y, z)* et *(O', ct', x', y', z')* :

$$\eta'_{\mu\nu}=\left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\right)\left(\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}}\right)\eta_{\alpha\beta}=\eta_{\mu\nu}=diag(1,-1,-1,-1)$$

Il est alors démontré que seule une transformée de Lorentz (TL) satisfait cette condition :

Transformée *spéciale* de Lorentz : $\begin{cases} ct'=\gamma(ct-\beta x) \\ x'=\gamma(x-\beta ct) \\ y'=y \\ z'=z \end{cases}$, $\vec{v}=v\vec{i}$, *(Ox)=(O'x')* et *O(t=0)=O'(t'=0).*

Transformée spéciale de Lorentz *inverse* : $\begin{cases} ct = \gamma(ct' + \beta x') \\ x = \gamma(x' + \beta ct') \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$, $v \to -v$ et $\beta \to -\beta$.

Matrice lambda pour la transformée spéciale de Lorentz :

$\eta_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^{\ \alpha} \Lambda_\nu^{\ \beta} \eta_{\alpha\beta}$, $\Lambda_\nu^{\ \mu} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, pour $\Lambda^\mu_{\ \nu}$ $\beta \to -\beta$, $\Lambda^\mu_{\ \lambda} \Lambda_\nu^{\ \lambda} = \delta_\nu^\mu$ et $\mathbf{\Lambda \Lambda^{-1} = \Lambda^{-1} \Lambda = I}$.

Cristian : Faire un changement de référentiel pour un tenseur de rang 2,
ça revient à faire un produit matriciel à 3 matrices ?

Mathieu : Je ne crois pas… Regardons.
Pour le produit de deux matrices $M = A \times B$, nous avons $m^i_{\ j} = a^i_{\ k} b^k_{\ j}$, l'indice ***k*** parcours les colonnes de *A* et les lignes de *B* à *i* et *j* fixés.
Pour 3 matrices $N = A \times B \times C$ et $n^i_{\ j} = a^i_{\ k} b^k_{\ l} c^l_{\ j}$, c'est associatif, on peut faire $A \times B$ ou $B \times C$ d'abord.
Par contre, pour un tenseur $T'_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^{\ \alpha} \Lambda_\nu^{\ \beta} T_{\alpha\beta}$, la somme de produits se fait en une seule fois.
Par exemple, pour le cas précédent de $\eta'_{\mu\nu}$, si vous faites le produit $\Lambda \times \Lambda \times \eta$, cela ne marche pas.
Par contre, $\eta'_{00} = \Lambda_0^{\ \alpha} \Lambda_0^{\ \beta} \eta_{\alpha\beta} = \Lambda_0^{\ 0} \Lambda_0^{\ 0} \eta_{00} + \Lambda_0^{\ 1} \Lambda_0^{\ 1} \eta_{11} + 0 ... = \gamma^2 \times 1 + \gamma^2 \beta^2 \times (-1) = 1$, comme attendu.

En relativité restreinte inertielle, tout 4-vecteur suit la transformée de Lorentz : $\boxed{\begin{cases} v'^0 = \gamma(v^0 - \beta v^1) \\ v'^1 = \gamma(v^1 - \beta v^0) \\ v'^2 = v^2 \\ v'^3 = v^3 \end{cases}}$.

Avec ces nouveaux outils, retrouvons certaines propriétés et trouvons-en de nouvelles.

► En utilisant la transformée de Lorentz pour x^μ :

Dilatation du temps : nous utilisons la transformée pour x^μ, dans le référentiel *R*, où une horloge est au repos, nous mesurons le temps propre $\tau = t_{E2} - t_{E1}$ entre deux événements E_1 et E_2, au même $x=0$, en début et fin de période. Ainsi, selon la TL, $t'_E = \gamma(t_E - \beta x)$, $\Delta t' = t'_{E2} - t'_{E1} = \gamma t_{E2} - \gamma t_{E1}$, et $\Delta t' = \gamma \tau$.

Contraction des longueurs : Dans le référentiel *R* où la règle est au repos, $\Delta x = x_{E2} - x_{E1} = L_0 - 0 = L_0$.
Dans le référentiel en mouvement, nous mesurons les extrémités aux mêmes instants : $t'_{E2} = t'_{E1}$.
Donc $ct_{E2} - \beta x_{E2} = ct_{E1} - \beta x_{E1}$ et $c\Delta t = \beta \Delta x$. Ainsi, $\Delta x' = L = x'_{E2} - x'_{E1} = \gamma(\Delta x - \beta c \Delta t) = \gamma L_0 (1 - \beta^2) = L_0 / \gamma$.

► En utilisant la transformée de Lorentz pour dx^μ : $\begin{cases} cdt' = \gamma(cdt - \beta dx) & (1) \\ dx' = \gamma(dx - \beta cdt) & (2) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \end{cases}$, $\vec{v}_{R'/R} = v \vec{i} = \beta c \vec{i}$

Loi de composition des vitesses : si nous définissons la vitesse comme en mécanique classique $v_x' = \frac{dx'}{dt'}$, $v_x = \frac{dx}{dt}$, et $\frac{(2)}{(1)}$ donne $v_x' = \frac{v_x - v}{1 - v\,v_x/c^2}$. Formule que vous connaissez déjà, mais ce qui nous intrigue aujourd'hui, c'est que cette formule ne correspond pas à une transformée de Lorentz !

Si c'était le cas, on aurait : $v'^1 = \gamma(v^1 - \beta v^0)$ soit $v'^x = \frac{v^x - v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, expression différente.

Le vecteur $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$, construit selon l'approche newtonienne, ne correspond pas à la partie spatiale d'un quadrivecteur. On ne pourra donc pas construire, avec cette définition de la vitesse, des lois invariantes par changement de référentiel. Au prochain cours, nous construirons la quadrivitesse u^μ, grandeur qui se transforme de manière dite *covariante*, et qui, par exemple dans le cadre de la RR inertiel, a des composantes qui se transforment selon la TL. Si nous voulons correctement interpréter la relativité, nous devons utiliser les concepts qui lui sont propre.

► En utilisant la transformée de Lorentz pour le vecteur d'onde k^μ :

Les équations de Maxwell donnent l'équation d'onde électromagnétique. Et les solutions pour l'onde plane monochromatique de polarisation rectiligne sont de la forme $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - k x)$.
La phase est un invariant : $\omega t - k x = \omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} = k^\mu x_\mu$, avec $k^\mu = (\omega/c, \vec{k})$, *quadrivecteur d'onde*.

Effet Doppler : Une onde électromagnétique dans le vide possède dans un référentiel R une pulsation $\omega = 2\pi f$. Quelle est la pulsation ω' perçue dans R' ?

$$\begin{cases} k'^0 = \gamma(k^0 - \beta k^1) \\ k'^1 = \gamma(k^1 - \beta k^0) \\ k'^2 = k^2 \\ k'^3 = k^3 \end{cases},$$

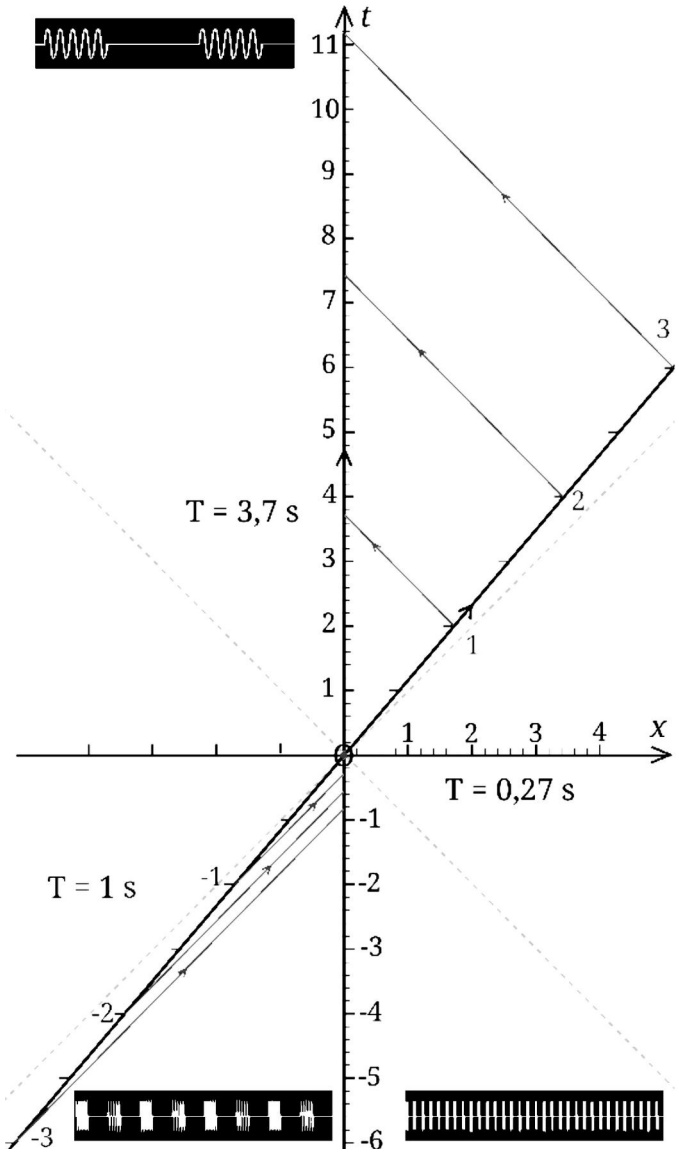
pour l'effet Doppler *longitudinal*,

$\vec{k} = k^x \vec{i} = k\,\vec{i}$, $k = \omega/c$, et $\omega' = \gamma(\omega - \beta\omega)$,

finalement : $f' = f\sqrt{\frac{1 \mp \beta}{1 \pm \beta}}$

suivant que l'on s'éloigne ou s'approche de la source.

Sur un diagramme de Minkowski, nous visualisons l'effet Doppler. Un vaisseau se déplace avec un γ de 2, soit à env. 87 % de c. Une lumière, au repos dans le vaisseau, émet une impulsion lumineuse jaune toutes les secondes.
Nous traçons les lignes d'univers des rayons lumineux et constatons, pour l'approche, une fréquence perçue plus élevée dans l'ultra-violet. Au contraire, une lumière est perçue dans l'infrarouge quand le vaisseau s'éloigne.



► En utilisant la transformée de Lorentz pour le tenseur électromagnétique $F^{\mu\nu}$:

Dans les quatre équations de Maxwell, les champs électrique et magnétique apparaissent comme des trivecteurs. Pour assurer l'invariance, nous pourrions essayer de réécrire les équations de Maxwell avec des quadrivecteurs. Les champs seraient alors les parties spatiales de ces 4-vecteurs. Mais cela ne fonctionne pas, il faut en fait considérer un tenseur de rang 2 antisymétrique. Pour $\vec{E}$ et $\vec{B}$, nous avons $3+3=6$ degrés de liberté. Pour un tenseur de rang 2, nous avons $4\times4=16$ composantes indépendantes. Du fait de l'antisymétrie, $F^{\mu\mu}=0$ et $F^{\mu\nu}=-F^{\nu\mu}$, nous avons aussi $16-4-6=6$ composantes indépendantes. Nous montrons par la suite que pour satisfaire les équations de Maxwell le tenseur s'écrit : $\boldsymbol{F}=F^{\mu\nu}\,\widetilde{e_\mu}\otimes\widetilde{e_\nu}$ avec $F^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$ (pour alléger, $E_i/c\rightarrow E_i$ soit $c\rightarrow1$).

$$F'^{\mu\nu}=\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}F^{\alpha\beta} \text{ d'où : } F'^{\mu\mu}=\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\nu}F^{\nu\nu}+\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\mu}{}_{\beta}\left(F^{\alpha\beta}+F^{\beta\alpha}\right)=0 \quad (\alpha\neq\beta)$$

$$E'_x=F'^{10}=\Lambda^{1}{}_{0}\Lambda^{0}{}_{1}F^{01}+\Lambda^{1}{}_{1}\Lambda^{0}{}_{0}F^{10}=\beta^2\gamma^2\times(-E_x)+\gamma^2\times E_x=E_x \quad \text{(10 termes dont 8 nuls)}$$

$$E'_y=F'^{20}=\Lambda^{2}{}_{2}\Lambda^{0}{}_{0}F^{20}+\Lambda^{2}{}_{2}\Lambda^{0}{}_{1}F^{21}=\gamma\times E_y-\beta\gamma\times B_z=\gamma\left(E_y-\beta B_z\right)$$

et ainsi de suite, à finir en exercice.

Les composantes de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ se mélangent, l'entité mathématique qui a un sens physique et représente les phénomènes électromagnétiques n'est pas un quadrivecteur mais un tenseur de rang 2.

► En relativité générale, c'est le tenseur de courbure de Riemann $R^{\alpha\beta\mu\nu}$ qui jouera un rôle central. Ce tenseur de rang 4 est covariant pour tous changements de coordonnées. Il encode toute l'information sur les courbures en tous points de l'espace-temps. Il a $4^4=256$ composantes, mais de par les symétries, il n'y en a que 20 d'indépendantes. Pour comparer en deux dimensions d'espace, ce même tenseur a $2^4=16$ composantes, et seulement 2 indépendantes qui correspondent aux courbures de Gauss R_1 et R_2 que l'on a sur deux plan perpendiculaires principaux en chaque point d'une surface.

Merci pour votre attention.

Résumé des notions vues aujourd'hui :

Cours 4 – CHANGEMENT DE COORDONNÉES

- Matrice lambda de changement de base
- Vecteurs, tenseurs et scalaires
- Construction de lois covariantes
- Cas particulier de la relativité restreinte inertielle
- Transformée de Lorentz
- Dilatation du temps
- Contraction des longueurs
- Composition des vitesses
- Effet Doppler

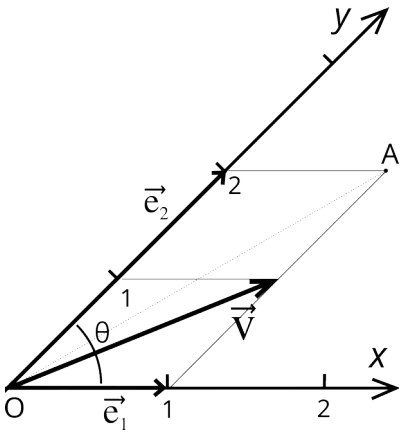
Pour réviser et s'exercer :

- Une feuille d’exercice n°2 suit.
- Chapitre 7 du livre RR pages 199 à 205, exercice 1, chapitre 3, pages 59 à 69, exercices 1 à 3, (chapitre 4 et exercices).
- Feuille d'exercices sur le calcul tensoriel : produit scalaire, vectoriel, matriciel, opérateurs et mise sous forme tensorielle des équations de Maxwell.

Feuille d'exercices n°2

Espace vectoriel, Changement de coordonnées et Composition des vitesses

Exercice 1 Considérons un espace euclidien avec une base cartésienne non-normale et non-orthogonale avec θ=π/4:



a) Donner les composantes covariantes g_{ij} de la métrique.

b) Écrire la métrique et déterminer la distance OA.

c) Exprimer le vecteur $\vec{v}$ avec les composantes contravariantes et la base covariante. Représenter les composantes sur le schéma.

d) Trouver les composantes contravariantes g^{ij} de la métrique.

e) Déterminer la base contravariante et les composantes covariantes de $\vec{v}$. Les dessiner sur la figure.

Exercice 2 Diagramme de Minkowski

a) Sur un diagramme d'espace-temps, représenter les événements $E_0(ct=1, x=0)$ et $E_1(ct=\gamma, x=\beta\gamma)$. E_1 représenté pour $\beta=1/2$.

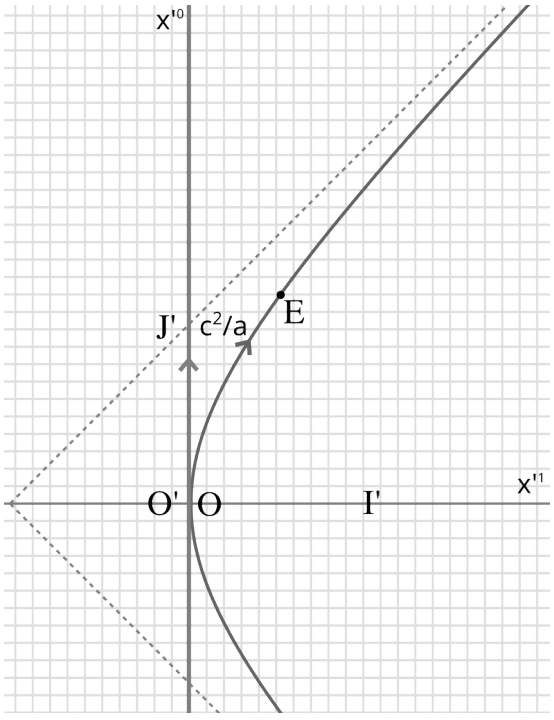
b) Trouver les pseudo-normes de $\widetilde{OE_0}$, $\widetilde{OE_1}$ et $\widetilde{E_OE_1}$. Ces vecteurs sont de quel genre ?

c) Représenter les courbe(s) pour $OE=\tau=1$.

d) Trouver un événement E_2 tel que $\widetilde{E_OE_2}$ et $\widetilde{E_OE_1}$ soient orthogonaux, et $E_0E_2=1$.

e) D'un point de vue minkowskien, que dire des triangles OE_0E_1 et $E_0E_1E_2$?

f) A-t-on des triangles équilatéraux minkowskiens ? Tout dépend de la définition. Prouver qu'il n'y a pas de triangles équilatéraux avec la même pseudo-norme pour les trois côtés (et donc de mêmes genres, temps, lumière ou espace). Cependant, c'est possible si les genres sont différents.
Exemple: trouver une valeur de β pour que OE_0E_1 soit un triangle équilatéral.



Exercice 3 Métrique dans un référentiel accéléré. Sur le diagramme de Minkowski d'un référentiel inertiel *R'*, deux lignes d'univers sont représentées, verticalement celle d'un observateur au repos en *O'*, sur la droite celle d'une fusée uniformément accélérée selon *x*. Le référentiel accéléré est noté *R*. À *t'=0*, *t=0*, et *O'(t'=0)=O(t=0)*. Le changement de coordonnées est donné :

$$ct' = \left(x + \frac{c^2}{a}\right)\sinh\left(\frac{at}{c}\right) \quad \text{et} \quad x' = \left(x + \frac{c^2}{a}\right)\cosh\left(\frac{at}{c}\right) - \frac{c^2}{a}$$

Trouver la métrique dans la fusée accélérée.

Représenter *R* avec les axes *(ct, x)* en *E=O(t>0)*.

Exercice 4

Depuis la Terre, nous mesurons avec notre référentiel inertiel, 5 ans après le départ du vaisseau, une énorme éruption stellaire produite par l'étoile Alpha Centauri B située à 4 années-lumière. Le vaisseau se déplace de la Terre vers Alpha Centauri à $\gamma = \sqrt{2}$. Dans le référentiel du vaisseau où et quand se produit l'éruption ?
Quand le flash lumineux émit par l'éruption sera-t-il vu par un télescope sur Terre ? Sur le vaisseau ?
Tracer un diagramme d'espace-temps pour illustrer les résultats de l'exercice.

Formules de composition des vitesses :

Exercice 5

1) Deux fusées arrivent face à face à la vitesse c/2. Quelle est leur vitesse relative ?

2) Deux fusées voyagent dans la même direction aux vitesses de 50%c et 75%c.
Quelle est leur vitesse relative ?

Exercice 6

Cours poursuite de deux fusées. Devant, la fusée des pirates fuit à la vitesse 3/4 c. Derrière, la fusée de la police va à c/2 et ne peut rattraper les pirates. Ainsi, depuis leur fusée, la police utilise un canon à proton, les protons sortent du canon à c/3. Les protons vont-ils atteindre la fusée des pirates ?
Dessiner aussi le diagramme de Minkowski qui illustre la situation.

Exercice 7

Un laser émet une lumière monochromatique rouge de 650 nm.
Un atome absorbe des photons de 2,9 eV.

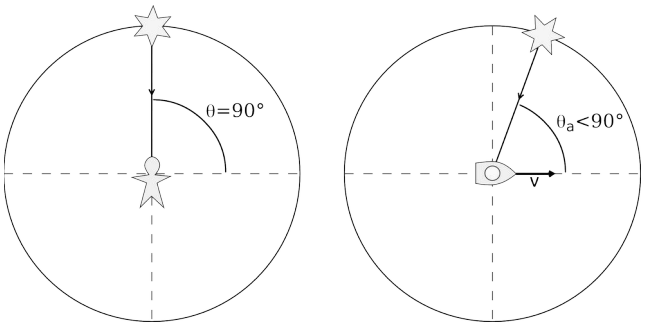
1) Comme le laser, l'atome est au repos et reçoit la lumière du laser, absorbe-t-il les photons ?

2) Comment l'atome doit-il se déplacer pour absorber un photon ?

Données: $h=6{,}62.10^{-34}\,J.s$, $c=3.10^{8}\,m/s$ *et* $e=1{,}6.10^{-19}\,C$.

Exercice 8

Déterminons le changement de perception du ciel étoilé depuis un vaisseau selon sa vitesse. En du changement de la couleur des étoiles par *effet Doppler*, leur position dans le ciel est modifiée, c'est ce qu'on appelle l'*aberration de la lumière*. Quand on est au repos dans le référentiel galactique *R*, les étoiles sont immobiles. Considérons le cas $\theta=\pi/2$, $\beta=v/c=0{,}8$ et $\lambda=580$ nm (lumière jaune).



1) Tracer un diagramme de Minkowski (ct, x, y) avec la vitesse du vaisseau $\vec{v} = v\,\vec{i}$, $v>0$. Exprimer l'équation de la ligne d'univers du rayon lumineux dans *R*, puis à l'aide d'une transformée de Lorentz la donner dans *R'*, le référentiel du vaisseau. Quel est l'angle apparent θ_a de l'étoile vue depuis le vaisseau ?

2) Quelle est la couleur de l'étoile perçue dans le vaisseau ?

Calcul Tensoriel : Introduction

Exercice 1

1) Dans un espace vectoriel métrique $\widetilde{a}\cdot\widetilde{b}=g_{ij}a^i b^j$ avec la métrique symétrique **g**. Avec cette formule montrer les deux propriétés suivantes:

i) $\widetilde{a}\cdot\widetilde{b}=\widetilde{b}\cdot\widetilde{a}$ ii) $\widetilde{a}\cdot(\widetilde{b}+\widetilde{c})=\widetilde{a}\cdot\widetilde{b}+\widetilde{a}\cdot\widetilde{c}$.

Considérons le tenseur unitaire complètement antisymmétrique de rang 3 ϵ_{ijk} avec $\epsilon_{123}=1$, si vous échangez deux indices le signe change, par exemple $\epsilon_{213}=-1$, si deux indices sont égaux la composante est nulle, par exemple $\epsilon_{iki}=0$. Si vous gardez l'ordre cyclique le signe reste le même : $\epsilon_{ijk}=\epsilon_{jki}=\epsilon_{kij}=-\epsilon_{kji}$.

2) Nous sommes à trois dimensions, dans un espace euclidien et un système de coordonnées cartésiennes orthonormé. Nous continuons à utiliser les notations contravariantes et covariantes telle que : $\vec{a}\cdot\vec{b}=a^i b_i=g_{ij}a^i b^j=a_i b^i=g^{ij}a_i b_j$.

Trouver les valeurs ou prouver les expressions suivantes par un calcul tensoriel :

i) ϵ_{321} ii) ϵ^{123} iii) $\epsilon_{12k}\epsilon^{12k}$ iv) $\epsilon_{ijk}\epsilon^{ijk}$ v) $\epsilon_{imn}\epsilon^{jmn}=2\delta_i^j$ vi) $\epsilon_{ijk}\epsilon^{mnk}=\delta_i^m\delta_j^n-\delta_i^n\delta_j^m$, nous pourrons utiliser la propriété suivante : $\epsilon_{ij}\epsilon^{mn}=\begin{vmatrix}\delta_i^m & \delta_i^n\\ \delta_j^m & \delta_j^n\end{vmatrix}$, généralisable en dimensions supérieures.

vii) $(\vec{a}\wedge\vec{b})_i=\epsilon_{ijk}a^j b^k$ viii) $\vec{a}\wedge\vec{a}=\vec{0}$ ix) $\vec{a}\wedge\vec{b}=-\vec{b}\wedge\vec{a}$ x) $(\vec{a}\wedge\vec{b})^i$

xi) $(\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w})$ xii) $\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c})=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$

Définition de l'opérateur vectoriel Nabla : $(\vec{\nabla})_i=\frac{\partial}{\partial x^i}=\partial_i$, $\vec{\nabla}=\vec{e}^{\,i}\partial_i$ et $\partial^i=g^{ij}\partial_j$.

Écrire ou prouver les expressions suivantes par un calcul tensoriel :

i) $(\vec{\nabla}f)_i$ ii) $\vec{\nabla}f$ iii) $\vec{\nabla}.\vec{V}$ iv) $\vec{\nabla}.\vec{\nabla}f=\Delta f=\partial_i\partial^i f$ v) $(\vec{\nabla}\wedge\vec{V})^i$ vi) $(\vec{\nabla}\wedge\vec{V})_i$

vii) $(\vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla})_i=0$ viii) $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{V})=0$ ix) $\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{V})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{V})-\Delta\vec{V}$

Il y a beaucoup de formules avec des opérateurs. Certaines sont évidentes, comme $\vec{\nabla}(fg)=f\vec{\nabla}g+g\vec{\nabla}f$. D'autres ne sont pas aussi simples qu'elle pourraient en avoir l'air, comme illustré par la suivante $\vec{\nabla}(\vec{u}\cdot\vec{v})=(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}+(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}+\vec{u}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{v})+\vec{v}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{u})$. En effet, $(\vec{\nabla}(\vec{u}\cdot\vec{v}))_i=\partial_i(u^j v_j)=u^j\partial_i v_j+v_j\partial_i u^j$ mais, par exemple, $((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{v})_i=u^j\partial_j v_i$. Ainsi pour vérifier les formules on peut être amené à développer selon *x*, *y* et *z*...

Exercice 2

En relativité restreinte et avec la métrique cartésienne orthonormée $\eta_{\mu\nu}$, considérons le tenseur unitaire complètement antisymmétrique de rang 4 $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$, avec $\varepsilon_{0123}=1$. Trouver les expressions suivantes par un calcul tensoriel :

i) ϵ_{3210} ii) ϵ^{0123} iii) $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ iv) $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon_{\rho\beta\gamma\delta}$

Avec la transformée spéciale de Lorentz montrer que ce tenseur est invariant en RR: $\varepsilon'^{\alpha\beta\gamma\delta}=\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$.

Aide: la définition du déterminant peut être reconnue, det $A=\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}a^0{}_\alpha a^1{}_\beta a^2{}_\gamma a^3{}_\delta$.

Exercice 3 Quelques démonstrations à faire : i) Si $T^{\mu\nu}$ est symétrique alors $T_{\mu\nu}$ l'est aussi.

ii) Si $T^{\mu\nu}$ symétrique alors $T_\mu{}^\nu = T^\nu{}_\mu$. iii) Montrer que tout tenseur $T_{\mu\nu}$ peut être considéré comme la somme de deux tenseurs antisymétrique $A_{\mu\nu}$ et symétrique $S_{\mu\nu}$ ($S_{\mu\nu}=S_{\nu\mu}$ et $A_{\mu\nu}=-A_{\nu\mu}$).

iv) $S_{\mu\nu}A^{\mu\nu}=0$ v) Changement de coordonnées : montrer que $T_{\mu\nu}T^{\mu\nu}= T'_{\mu\nu}T'^{\mu\nu}$ (scalaire invariant)

Exercice 4 Électromagnétisme et dynamique

Tenseur électromagnétique : $\boldsymbol{F}=F^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$, 4-vecteur courant : $\tilde{j}=q\,\tilde{u}$

En relativité restreinte :

1) Montrer que le tenseur $F^{\mu\nu}$ est antisymétrique.

2) Déterminer les composantes du tenseur $F_{\mu\nu}$.

3) Trouver les lois de transformation de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ pour une transformée spéciale de Lorentz:

$$\begin{cases} E'_x = E_x \\ E'_y = \gamma(E_y - \beta c B_z) \\ E'_z = \gamma(E_z + \beta c B_y) \\ B'_x = B_x \\ B'_y = \gamma(B_y + \beta E_z/c) \\ B'_z = \gamma(B_z - \beta E_y/c) \end{cases}$$

Application: Dans le référentiel du laboratoire *R*, nous un faisceau homocinétique de protons de vitesse $\vec{v}$, rayon *r* et densité *n*. Soit *R'* le référentiel propre des protons au repos. Avec les théorèmes de Gauss et Ampère, déterminer les champs électrique et magnétique à l'extérieur du faisceau dans *R'*. Faire même dans *R*. Retrouvez-vous les mêmes résultats avec la transformation de Lorentz montrée à droite ?

En relativité restreinte ∂_μ est un quadrivecteur covariant.

4) Pourquoi l'équation suivante $\partial_\mu F^{\mu\nu}=\mu_0 j^\nu$ est covariante ? Un équation est dite covariante, si l'équation garde la même forme sous une transformation de groupe, ici le groupe de Lorentz, ainsi dans tout les référentiels inertiels *R'*, $\partial'_\mu F'^{\mu\nu}=\mu_0 j'^\nu$. Montrer que cette équation tensorielle redonne les équations de Maxwell avec sources.

5) Montrer que l'équation $\partial^\alpha F^{\mu\nu}+\partial^\mu F^{\nu\alpha}+\partial^\nu F^{\alpha\mu}=0$ est covariante, et donne les deux autres équations de Maxwell $\vec{\nabla}\wedge\vec{E}=-\partial\vec{B}/\partial t$ et $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$.

6) Pourquoi $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ et $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}$ sont des invariants de Lorentz ? En déduire que $\vec{B}^2-\vec{E}^2/c^2$ et $\vec{E}\cdot\vec{B}$ sont invariants. Pour l'application de la question 3), utiliser les invariants de Lorentz pour retrouver les champs dans *R* depuis ceux de *R'*.

7) Montrer que $\frac{d\vec{p}}{dt}=q(\vec{E}+\vec{v}\wedge\vec{B})$ et $\frac{dE}{dt}=q\vec{E}\cdot\vec{v}$ avec l'équation covariante $\frac{d\tilde{p}}{d\tau}=\boldsymbol{F}\,\tilde{j}$, soit $\frac{dp^\mu}{d\tau}=F^{\mu\nu}j_\nu$.

Cours 5

Quadrivecteurs

Mathieu : Bonjour.
Nous allons aujourd'hui étudier des objets qui permettrons d'établir les lois de la physique en relativité restreinte (ces objets et lois seront par la suite adaptés pour la relativité générale).
Ces objets seront, bien sûr, des tenseurs – vecteurs et scalaires.
De plus, ces lois devront donner celles de Newton dans la limite des faibles vitesses.
Alors, dites-moi, de quels quadrivecteurs et scalaires disposons nous déjà pour faire de la physique ?

Arkaitz : Le quadrivecteur position !

Luna : Le temps propre...

Mathieu : Tout à fait. Nous avons $\widetilde{x}$, son infinitésimal $d\widetilde{x}$ et $d\tau$, depuis son produit scalaire (pseudonorme). Ces trois objets sont *covariants*[3] sous la transformée de Lorentz.
Nous sommes maintenant prêt à construire un objet covariant homogène à une vitesse :

$$\textbf{Quadrivitesse} : \boxed{\widetilde{u}=\frac{d\widetilde{x}}{d\tau}} \quad \text{soit} \quad u^{\mu}=\frac{dx^{\mu}}{d\tau} \quad \text{et} \quad \widetilde{u}=\left(c\frac{dt}{d\tau},\frac{dx}{d\tau},\frac{dy}{d\tau},\frac{dz}{d\tau}\right).$$

$$\text{Or :}\ c^2 d\tau^2=c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2 \ \Rightarrow\ c^2d\tau^2=c^2dt^2\left(1-v_x^2-v_y^2-v_z^2\right) \ \Rightarrow\ d\tau=dt/\gamma$$

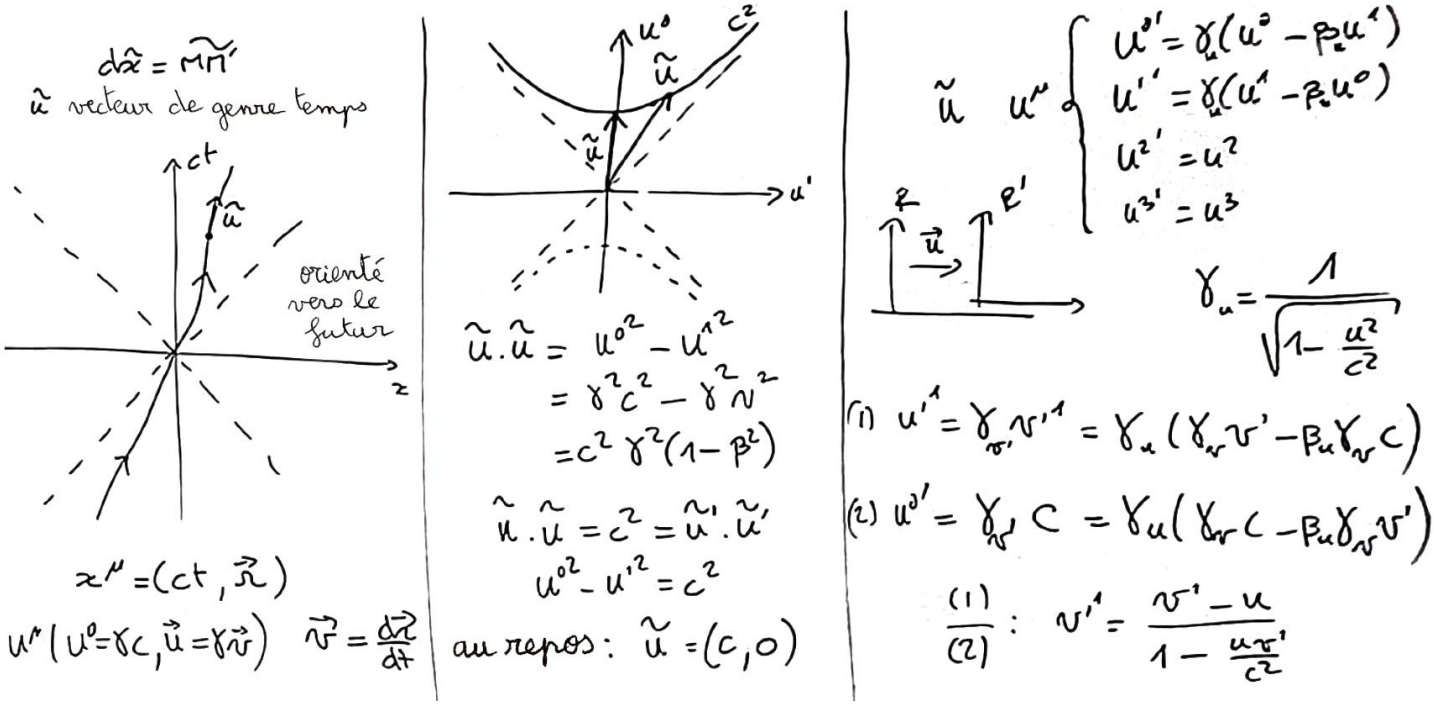
avec v la vitesse de Newton $v^i=\frac{dx^i}{dt}$ (vitesse coordonnée), et non pas celle d'Einstein $u^i=\frac{dx^i}{d\tau}$!

$$\text{Ainsi :}\quad \widetilde{u}=\left(\gamma c,\gamma\vec{v}\right) \quad \text{avec} \quad \gamma=\gamma_v=\frac{1}{\sqrt{1-\beta_v^2}} \quad \text{et} \quad \beta_v=\frac{v}{c}$$

$\widetilde{u}$ est covariant car $d\widetilde{x}$ et $d\tau$ le sont. Et nous retrouvons bien, pour la partie spatiale, la vitesse de Newton pour $v \ll c$ et $\gamma \to 1$. Ainsi, la vitesse maximale u_{max} pour une particule dans le cadre de la relativité est infinie : γ tend vers l'infini quand la vitesse v de la théorie de Newton tend vers une constante c.
Il faut utiliser les nouveaux concepts de la relativité pour la comprendre. La théorie de la relativité est si innovante, que nous avons tendance à retomber dans d'anciennes formulations issues de la mécanique classique. Il arrive, même dans le contexte académique, que les concepts prè-relativistes perdurent dans les cours de relativité. Jusqu'aux cours de licence, des termes ambivalents peuvent subsister, par exemple, la loi de composition des vitesses en relativité est souvent donnée avec la vitesse de Newton, et non la composante spatiale de la vitesse covariante. Mettons donc les choses au clair : la vitesse de la lumière est, dans la théorie d'Einstein, la vitesse infinie. Dans ce cadre, on n'a donc pas à se demander si un jour nous pourrions aller plus vite que la lumière. Par exemple, un électron qui a une vitesse proche de la vitesse de la lumière, peut traverser notre galaxie, de 100 000 *al* de diamètre, en quelques secondes, mesurées dans son référentiel. Pour cet électron $u \to \infty$. Aller plus vite que c au sens de Newton est donc juste impossible, car à $v \simeq c$ l'électron aurait déjà traversé la galaxie de manière instantanée ! Quand j'étais étudiant de licence, nous parlions avec fascination des *tachions* : « *Certes nous ne pouvons passer la limite c infranchissable de la lumière, car il faudrait une énergie infinie, mais il pourrait exister des particules qui auraient toujours été plus rapides que la lumière...* ». Non, les tachions n'existent pas dans le cadre de la théorie de la relativité. Nous laissons les vitesses au-delà de celle de la lumière et les voyages dans le passé à la science-fantaisie – même pour la science-fiction il faudrait éviter !

3 À noter une confusion possible : le terme *covariant* n'a pas ici le même sens que pour les indices dit covariants ou contravariants. En général, on dit plutôt covariant pour un tenseur, et invariant pour un scalaire de ces tenseurs.

Ci-dessous, le diagramme d'espace-temps pour la quadrivitesse, et à droite la démonstration de la loi de composition des vitesses ─ au sens classique ─ en partant de la covariance de la quadrivitesse.



Construisons maintenant une accélération covariante.

Cristian : Il suffit de dériver à nouveau la quadrivitesse par rapport à τ ?

Mathieu : Oui, nous aurons : $\boxed{\widetilde{w} = \frac{d\,\widetilde{u}}{d\,\tau}}$ pour la **quadriaccélération**.

Nous choisissons la lettre *w* pour désigner la 4-accélération. En effet, nous voyons, dans le calcul qui suis, que la relation est loin d'être triviale, entre la partie spatiale de l'accélération $\widetilde{w}$ de la relativité, et l'accélération $\vec{a}$ de Newton.
Pour invariant, nous obtenions avec le produit scalaire de la 4-vitesse, la constante de structure *c*, dans le cas de la 4-accélération, nous obtenons l'accélération propre a_p (montré page suivante).
La relation $w^\mu = d\,u^\mu / d\,\tau$ est vraie en relativité restreinte inertielle et en coordonnées cartésiennes. Dans le cas général, nous aurons des termes supplémentaires, de manière à ce que nous ayons, en toutes circonstances, $\widetilde{w} = \widetilde{0}$ pour une particule libre.

<u>Commentaire</u> : pour $f(x^\mu)$ nous avons $df = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} d\,x^\mu = d\,x^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} = d\,x^\mu \partial_\mu f$

d'où l'opérateur $d\,\square = d\,x^\mu \partial_\mu \square$ soit $d = d\,x^\mu \partial_\mu$. Nous avons alors : $\frac{d}{d\,\tau} = u^\mu \partial_\mu$ et $w^\mu = \frac{d\,u^\mu}{d\,\tau} = u^\nu \partial_\nu u^\mu$

or, la 4-vitesse est covariante, mais ∂_μ n'est pas covariante ─ sauf en relativité inertielle avec des coordonnées cartésiennes. Cette définition pour l'accélération fonctionne donc dans ce chapitre, mais ∂_μ sera ensuite remplacé par une dérivée covariante.

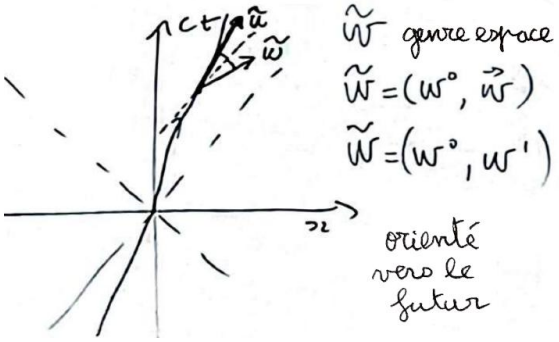
Propriétés :

$$\frac{d}{d\tau}\left(\underbrace{\tilde{u}.\tilde{u}}_{c^2}\right)=0$$

$$=\frac{d\tilde{u}}{d\tau}.\tilde{u}+\tilde{u}.\frac{d\tilde{u}}{d\tau}=2\,\tilde{w}.\tilde{u}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{w}.\tilde{u}=0}$$

$\tilde{w}$ et $\tilde{u}$ orthogonaux



$\tilde{w}$ genre espace

$\tilde{w}=(w^0,\vec{w})$

$\tilde{w}=(w^0,w')$

$$w^0=\frac{du^0}{d\tau}=\frac{d}{d\tau}(\gamma c)=\gamma c\frac{d\gamma}{dt}$$

$$dt=\gamma d\tau$$

$$\frac{d\gamma}{dt}=\frac{d}{dt}\left[(1-\beta^2)^{-1/2}\right]=-\frac{1}{2}(-2\beta\dot{\beta})(1-\beta^2)^{-3/2}$$

$$\dot{\beta}=\frac{d\beta}{dt}\qquad w^0=\gamma^4 c\beta\dot{\beta}$$

$$\cdots\quad \tilde{w}=\left(\gamma^4\vec{a}.\vec{\beta};\gamma^4(\vec{a}.\vec{\beta})\vec{\beta}+\gamma^2\vec{a}\right)$$

R au repos : $\tilde{w}=(0;\vec{a})$

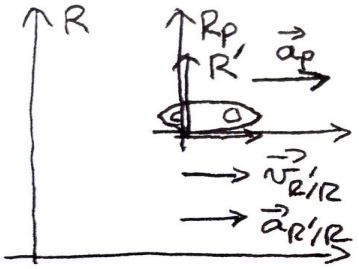
$$\boxed{\tilde{w}.\tilde{w}=-a_p^2}=\tilde{w}'.\tilde{w}'$$

Application : mouvement d'une fusée animée par une accélération propre constante.

R_p : référentiel propre de la fusée, non-inertiel, $\vec{a}_p=\vec{g}$.

R' : référentiel inertiel coïncidant, $\tilde{w}'=(0,\vec{a}_p)$

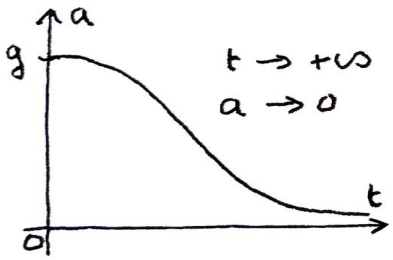
R : référentiel galactique où se déplace la fusée $\vec{v}=\vec{v}_{R'/R}$ et $\vec{a}=\vec{a}_{R'/R}$.



Transformée de Lorentz : $\begin{cases} w^0=\gamma(w'^0+\beta w'^1) \\ w^1=\gamma(w'^1+\beta w'^0)\end{cases}$

d'où $\begin{cases} w^0=\gamma\beta a_p \\ w^1=\gamma a_p\end{cases}$ or $w^0=\gamma\beta a_p=\gamma^4\beta a$

et $a(t)=\dfrac{dv(t)}{dt}=\dfrac{a_p}{\gamma(t)^3}\neq cste$ soit $\boxed{a=\dfrac{a_p}{\gamma^3}}$



Courbe facile à tracer avec un tableur (méthode pas à pas).

Adriana : Mais R_p, le référentiel de la fusée, n'est pas inertiel, et la transformée de Lorentz n'est pas valide. Pourquoi peut-on considérer le référentiel coïncidant ?

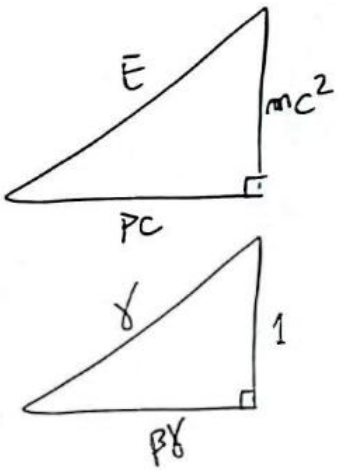
Mathieu : Point délicat. Instantanément et localement, il est toujours possible de définir un référentiel inertiel coïncidant, c'est le *principe d'équivalence*. Nous étudions alors le mouvement depuis ce référentiel *R'*. Aux faibles vitesses nous devons retrouver les lois de Newton, lorsque R_p et *R'* coïncident, $\vec{v}_{R_p/R'}$ est proche de $\vec{0}$, et la mécanique classique s'applique : loi de composition des accélérations entre *R'* et R_p, $\vec{a}_a=\vec{a}_r+\vec{a}_e+\vec{a}_c$ d'où $\vec{a}_{R'}(M)=\vec{0}+\vec{a}_p+\vec{0}=\vec{a}_p$. Ce qu'il fallait démontrer.

Après avoir introduit les deux grandeurs cinématiques fondamentales $\tilde{u}$ et $\tilde{w}$, cherchons une grandeur cinétique, qui fait intervenir la masse *m* de la particule, et qui correspond à la quantité de mouvement.

En Newton $\vec{p}=m\vec{v}$, il semble donc immédiat de considérer $\boxed{\tilde{p}=m\tilde{u}}$ nommée **impulsion**, où *m* est une caractéristique invariante d'une particule. D'où $\tilde{p}=(m\gamma c, m\gamma\vec{v})$. Habituellement, le terme *quantité de mouvement* est utilisé en classique, et le terme *impulsion* en relativité, autant pour le quadrivecteur $\tilde{p}$ que sa partie spatiale $\vec{p}=m\gamma\vec{v}$. Vous remarquerez que la lettre *p* a ici été conservée, car l'impulsion selon sa définition relativiste a pleinement été adoptée par la communauté scientifique. Dans $\vec{p}=m\gamma\vec{v}$, certains associent le γ à la masse et l'on parle alors de masse relativiste γm. Vous aurez compris que dans ce cours nous préférons associer γ à $\vec{v}$ pour former la vitesse covariante. Les deux interprétations sont intéressantes.
Pour la partie spatiale de $\tilde{p}$ nous retrouvons la quantité de mouvement quand $v\to 0$: $\vec{p}=m\gamma\vec{v}$ → $m\vec{v}$.
De son côté, à quoi correspond la partie temporelle ? Nous pouvons faire apparaître une quantité homogène à une énergie : $p^0=m\gamma c=E/c$, $\tilde{p}=(E/c,\vec{p})$ et $E=m\gamma c^2$.
Pourrions-nous donner une sens physique à cette énergie ? (vous connaissez la réponse!)
Limite classique : $E=m\gamma c^2=mc^2(1-(v/c)^2)^{-1/2}\simeq mc^2+\frac{1}{2}mv^2+...$, à l'ordre 1 en *v/c*, nous retrouvons l'énergie cinétique classique ! Et un terme d'ordre zéro tout à fait nouveau, une énergie liée à la masse de la particule !! Ainsi, même au repos, une particule aurait une énergie… Eh oui ! Et nous l'appelons *énergie de masse* : $E_0=mc^2$. Concept découvert par Einstein dans son deuxième article de 1905 ─ nouvelle notion avec des applications qui vont profondément changer notre société. Tout cela au détour d'un petit jeu avec des tenseurs covariants…

Nous choisissons la définition suivante : $E=E_0+T$, avec *E* l'énergie relativiste, séparée en, E_0 l'énergie au repos, et, le reste, *T* l'énergie cinétique relativiste.

Dans le référentiel coïncidant la particule est au repos : $\tilde{p}'=(mc,\vec{0})$
d'où $\tilde{p}'\cdot\tilde{p}'=m^2c^2=\tilde{p}\cdot\tilde{p}=\eta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu=E^2/c^2-p^2$ et $E^2=m^2c^4+p^2c^2$.



La formule $E=mc^2$ implique une équivalence masse-énergie : l'énergie peut se transformer en masse, et inversement, la masse en énergie. Par exemple, lors de la collision de deux particules de grande énergie cinétique, des particules peuvent apparaître comme de "nul part". C'est ainsi que l'on a découvert l'antiproton en 1955 grâce à un accélérateur de particules.

Et bien sûr, pour finir, une grandeur dynamique, la **quadriforce** : $\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}$ ⇒ $\boxed{\frac{d\tilde{p}}{d\tau}=\tilde{g}}$

d'où $\frac{dm\tilde{u}}{d\tau}=m\frac{d\tilde{u}}{d\tau}=m\tilde{w}=\tilde{g}$ ainsi avec la définition de la force classique $\vec{F}=m\vec{a}$:

$$\tilde{g}=(g^0,\vec{g})=(\gamma^4\vec{F}\cdot\vec{\beta},\gamma^4(\vec{F}\cdot\vec{\beta})\vec{\beta}+\gamma^2\vec{F})$$

Au prochain cours nous nous intéresserons aux collisions et à la force de Lorentz, avec l'étude du mouvement d'une particule chargée dans un champs électromagnétique.

Merci à vous.

Résumé des notions vues aujourd'hui :

Cours 5 – QUADRIVECTEURS

- Quadrivitesse / Diagramme / vitesse covariante et vitesse limite
- Quadriaccélération / Orthogonalité / Invariant
- Cas du mouvement à accélération propre constante
- Impulsion et équivalence masse-énergie
- Énergie cinétique / Triangle énergie-masse-impulsion
- Quadriforce

Pour réviser et s'exercer :

- Feuille d’exercice n°3 : exercices 1, 2 et 3.
- Chapitre 7 du livre RR pages 206 à 224, chapitre 3, page 69.

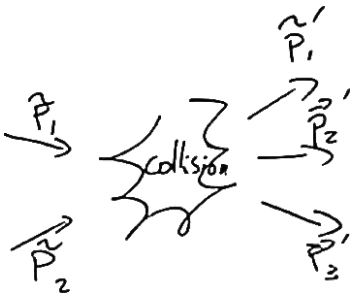
Cours 6

Dynamique relativiste

Mathieu : Bonjour, nous allons aujourd'hui continuer et terminer notre cours sur la relativité restreinte inertielle. Commençons par les **collisions**. Nous considérons un système *S* isolé à *n* corps. La résultante des quadriforces exercée sur l'ensemble des points est alors nulle, et nous en déduisons les lois de conservation pour l'énergie et l'impulsion :

$$\widetilde{g}_S=\widetilde{0} \Rightarrow \frac{d\widetilde{p}_S}{d\tau}=\widetilde{g}_S=\widetilde{0} \Rightarrow \widetilde{p}_S=(E_S/c\,,\vec{p}_S)=\widetilde{cste} \Rightarrow E_S=cste\,,\ \vec{p}_S=\overrightarrow{cste} \text{ avec } E_S=\sum_i E_i \text{ et } \vec{p}_S=\sum_i \vec{p}_i$$

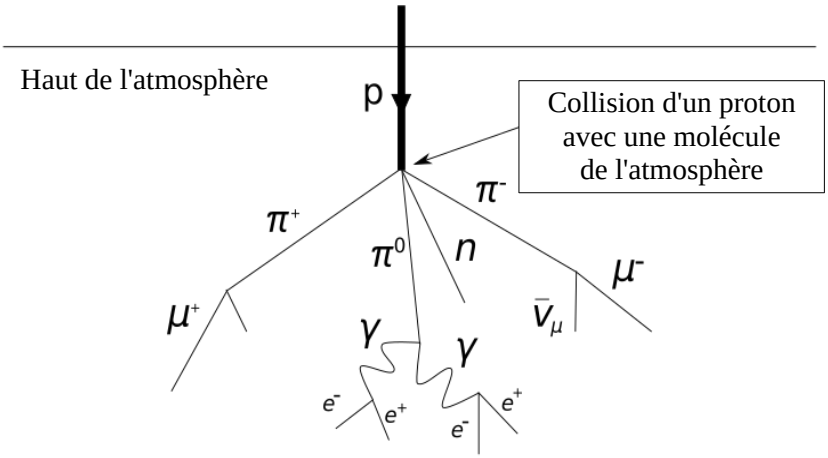
Conservation de l'énergie-impulsion



$$\begin{cases} \left(\sum_i E_i\right)_{avant} = \left(\sum_i E_i'\right)_{après} \\ \left(\sum_i \vec{p}_i\right)_{avant} = \left(\sum_i \vec{p}_i'\right)_{après} \end{cases}$$

Nous nous placerons souvent dans le **référentiel barycentrique** où : $\vec{p}_S^{\,*}=\vec{0}$

Exemple d'une **désintégration** en 2 corps dans le cas des rayons cosmiques : $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$

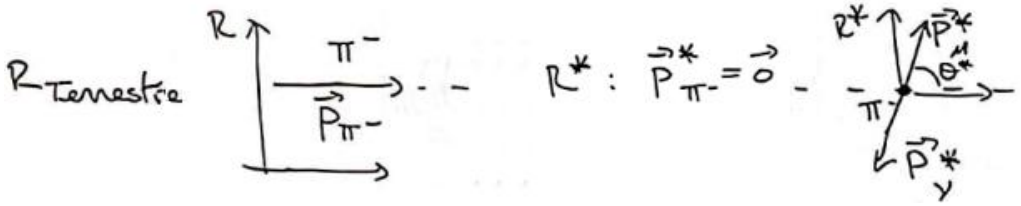


Énergie cinétique initiale du pion : prise égale à 5 GeV

Masse d'un pion chargé : 139,57 MeV/c²

Temps de vie moyen d'un pion chargé : 26 ns

Masse du muon : 105,66 MeV/c²



(pion au repos dans R^*)

$$\begin{cases} \vec{p}^{\,*}_{\pi^-}=\vec{0}=\vec{p}^{\,*}_\mu+\vec{p}^{\,*}_\nu \\ E^*_{\pi^-}=m_{\pi^-}c^2=E^*_\mu+E^*_\nu \end{cases} \qquad p^*=p^*_\mu=p^*_\nu \qquad E_\mu^{*2}=\left(E^*_\pi-E^*_\nu\right)^2$$

$$m_\mu^2c^4+p^{*2}c^2 = m_\pi^2c^4+p^{*2}c^2-2m_\pi c^2\times p^*c$$

$$p^*_\mu = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi}c \quad \dots \quad E^*_\mu = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi}c^2$$

Applications numériques : $E^*_\mu \simeq 109{,}78$ MeV $\quad T^*_\mu \simeq 4{,}12$ MeV $\ll m_\mu c^2 \quad E^*_\nu \simeq 29{,}79$ MeV

Nous appliquons ensuite la transformée de Lorentz au 4-vecteur $\tilde{p}_\mu$ quand $\theta^*=0$:

$$\tilde{p}_\mu : \begin{cases} p^0_\mu = \gamma\left(p^{0*}_\mu + \beta\, p^{1*}_\mu\right) \\ p^1_\mu = \gamma\left(p^{1*}_\mu + \beta\, p^{0*}_\mu\right) \end{cases} \text{ avec } \beta = \beta_{\pi^-} \text{ et } \gamma = \gamma_{\pi^-} \text{ d'où } p_\mu = \gamma_\pi\left(\frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} + \beta_\pi \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi}\right)c$$

or $\gamma_{\pi^-} = E_\pi / m_\pi c^2 \simeq 36$ d'où $\beta_\pi \simeq 1$, $p_\mu \simeq \gamma_\pi m_\pi c$ et $E_\mu \simeq \gamma_\pi m_\pi c^2 \simeq \gamma_\pi \times 140\, MeV$ si $\theta^* = 0$.

Si $\theta^* = \pi$, $p_\mu \simeq \gamma_\pi m_\mu^2 / m_\pi c$ et $E_\mu \simeq \gamma_\pi \times 80\, MeV$.

Relation fondamentale de la dynamique pour une masse ponctuelle :

$$\frac{d\tilde{p}}{d\tau} = \tilde{g}^{EM} = F\tilde{j} \qquad \frac{dp^\mu}{d\tau} = F^{\mu\nu} j_\nu$$

Sous la forme standard :

La forme standard, fréquemment utilisée, est pratique, mais l'on perd de vue certaines symétries : $\vec{f}$ n'est pas la partie spatiale d'un quadrivecteur, contrairement à $\vec{g} = \gamma \vec{f}$.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f} \quad \text{et} \quad \vec{p} = m\gamma\vec{v}$$

avec $\vec{f} = \vec{f}_L = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$ pour la force de Lorentz

et pour l'énergie : $\boldsymbol{E} = \gamma m c^2 = T + mc^2$ et $\frac{d\boldsymbol{E}}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{v}$

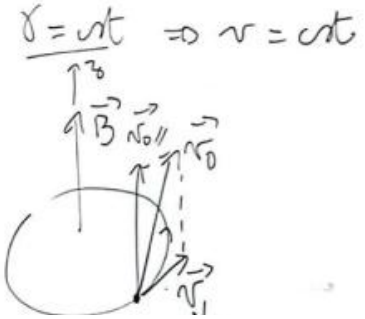
Cas d'un champ magnétique uniforme : $\vec{B} = \overrightarrow{cst}$ et $\vec{E} = \vec{0}$

$$\begin{cases} \frac{d(m\gamma\vec{v})}{dt} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \\ \frac{dE}{dt} = \left(q\vec{v} \wedge \vec{B}\right) \cdot \vec{v} = 0 \end{cases}$$

$E = cst = m\gamma c^2 \Rightarrow \gamma = cst \Rightarrow v = cst$

$m\gamma \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$

$m \longrightarrow \gamma m$



$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N = \frac{dv}{dt}\vec{t} + \frac{v^2}{R}\vec{n} = \frac{v^2}{R}\vec{n}$$

$$m\gamma \frac{v_{0\perp}^2}{R} = q v_{0\perp} B$$

$$R = \frac{\gamma m v}{|q|B}$$

$$R_{SR} = \gamma R_{Newton}$$

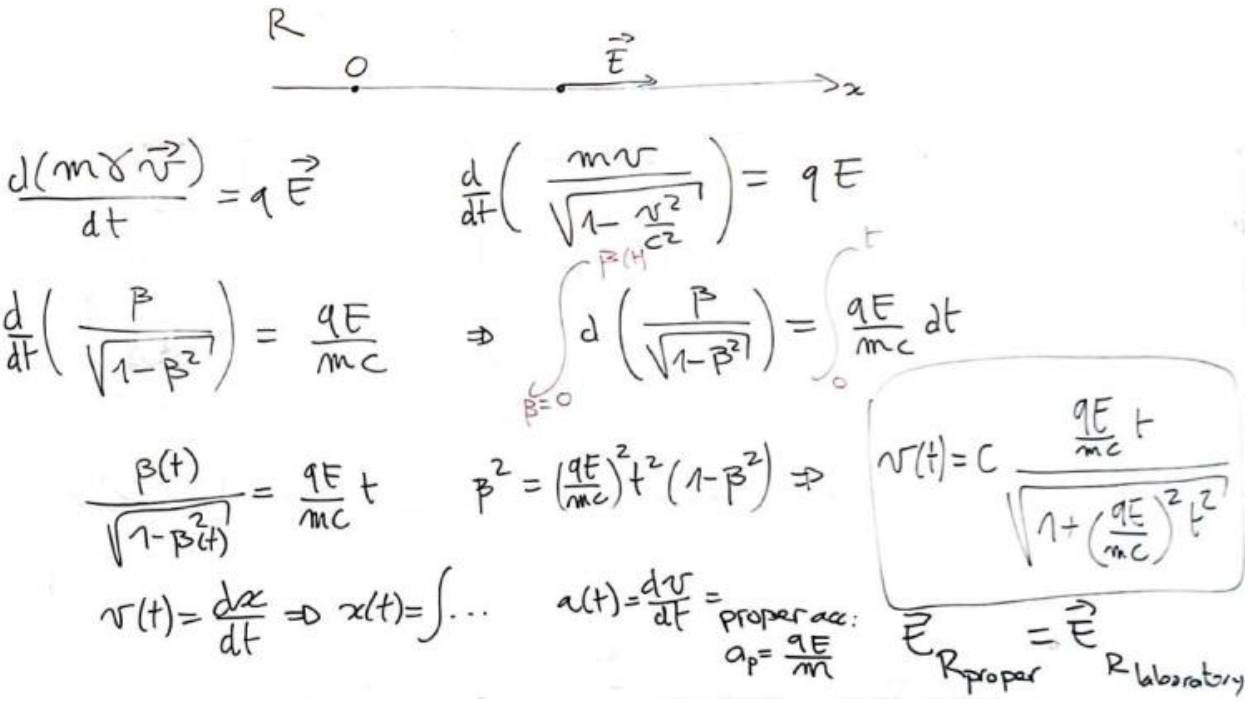
$$\omega_{SR} = \frac{|q|B}{\gamma m} = \frac{\omega_{Newton}}{\gamma}$$

Comme le mouvement est uniforme, les résultats en relativité sont similaires au cas newtonnien à un facteur γ près.

Nous avons le même type de trajectoire hélicoïdale.

Cas d'un champ électrique uniforme : $\vec{E}=\overrightarrow{cst}$ et $\vec{B}=\vec{0}$ d'où $\vec{f}=q\vec{E}$ et $\frac{d\vec{p}}{dt}=q\vec{E}$

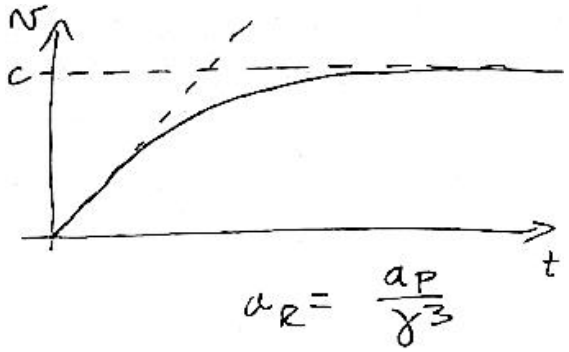
Nous prendrons $\vec{v}(t=0)=\vec{0}$ d'où $\frac{d\boldsymbol{E}}{dt}>0$ et $\frac{d\gamma}{dt}>0$. Soit $q>0$ et $\vec{E}=E\vec{i}$, $E>0$:

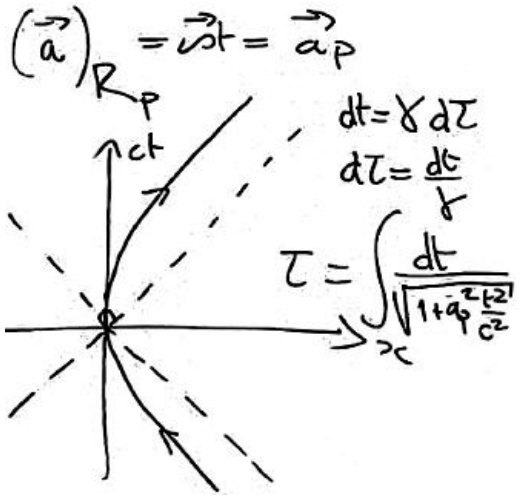


Le mouvement correspond ici à un un mouvement à accélération propre constante.

Arkaitz : Les champs électrique et magnétique ne dépendent pas du référentiel ?

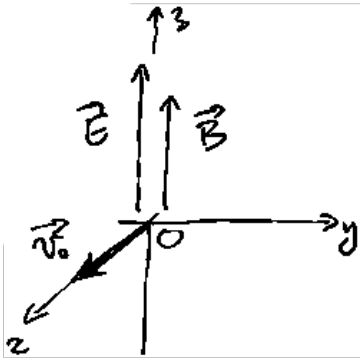
Mathieu : La force électrique est constante dans *R*, et effectivement *a priori* le champ électromagnétique dépend du référentiel, mais dans ce cas particulier ce n'est pas le cas. Vous pouvez effectuer la transformation dans le référentiel inertiel coïncidant. Pour qu'un champ magnétique apparaisse, ou modifier le champ électrique, il faudrait une composante transversale pour $\vec{E}$.





Cas de champs électrique et magnétiques uniformes et parallèles :

$$\vec{E}=E\vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{B}=B\vec{k}$$



$$\frac{d\, m\gamma \vec{v}}{dt} = q(\vec{E}+\vec{v}\wedge\vec{B}) = q\begin{pmatrix}0\\0\\E\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\0\\B\end{pmatrix}$$

$$m\frac{d}{dt}\left(\frac{v_x}{\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}-\frac{v_y^2}{c^2}-\frac{v_z^2}{c^2}}}\right) = qBv_y$$

$$m\frac{d}{dt}\left(\frac{v_y}{\sqrt{\quad}}\right) = -qBv_x$$

$$m\frac{d}{dt}\left(\frac{v_z}{\sqrt{\quad}}\right) = qE$$

difficult ?!

Il est possible d'intégrer ces équations différentielles, mais leur forme ne serait-elle pas plus simple en gardant la covariance ? Essayons.

Nous exprimons les équations différentielles à l'aides d'invariants, le temps propre et la quadrivitesse.
Les équations obtenues sont beaucoup plus simples.
Avec la composante temporelle, la conservation de l'énergie nous donne $\gamma(t)$:

$$\frac{d}{dt} = \frac{1}{\gamma}\frac{d}{d\tau}$$

$$p^x = m u^x$$

$$u^x = \gamma v^x$$

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = F^{\mu\nu} j_\nu$$

$$\frac{dp^x}{d\tau} = -qB(\gamma v^x)$$

$$\begin{cases} m\dfrac{du^x}{d\tau} = +qBu^y \\ m\dfrac{du^y}{d\tau} = -qBu^x \end{cases}$$ good

$$\frac{du^z}{d\tau} = \gamma\frac{qE}{m}$$

$$\boxed{\frac{du^z}{dt} = \frac{qE}{m}} \qquad u^3 = \frac{qE}{m}t$$

$$\frac{dp^0}{d\tau} = \vec{f}\cdot\vec{u} \qquad u^0 = \gamma c$$

$$\boxed{\frac{d\, mcu^0}{d\tau} = qEu^3} \qquad \frac{d\gamma}{dt} = \dots t$$

four-velocity : $\tilde{u}\cdot\tilde{u} = c^2$

$$u^\mu u_\mu = c^2$$

$$\boxed{u^0u_0 + u^iu_i = c^2}$$

$$u^0 = u_0 \qquad u^i = -u_i$$

$\in\mathbb{C}$ $\in\mathbb{R}$ $\in\mathbb{R}$

$$\boxed{\psi(\tau) = u^x(\tau) + i\,u^y(\tau)}$$

(1)+i(2) : $\boxed{\frac{d\psi}{d\tau} = -i\frac{qB}{m}\psi}$

$$\frac{d\psi}{\psi} = -i\frac{qB}{m}d\tau$$

$$\psi(\tau) = \psi(0)e^{-i\frac{qB}{m}\tau}$$

$$\psi(0) = u^x(0) + i\,u^y(0)$$

$$\psi(0) = \gamma_0 v_0$$

!

$$\psi(\tau) = \gamma_0 v_0 e^{-i\frac{qB}{m}\tau}$$

$$Re(\psi(\tau)) = u^x(\tau) = \gamma_0 v_0 \cos\left(\frac{qB}{m}\tau\right)$$

$$u^y(\tau) = -\gamma_0 v_0 \sin\left(\frac{qB}{m}\tau\right)$$

$$u^0u_0 = \gamma^2c^2 = \gamma_0^2v_0^2\left[\cos^2\left(\frac{qB}{m}\tau\right) + \sin^2\left(\frac{qB}{m}\tau\right)\right] + \left(\frac{qE}{m}\right)^2t^2$$

$\Rightarrow \gamma(t)$

$$dt = \gamma\, d\tau \qquad \tau = \int \frac{dt}{\gamma(t)} \Rightarrow \tau(t)$$

$$u^x(\tau) = \gamma v^x(\tau) \Rightarrow v^x(t) \dots$$

Application à une magnétosphère :

Nous modélisons le champ magnétique créé par un dipôle, soit en coordonnées sphériques :

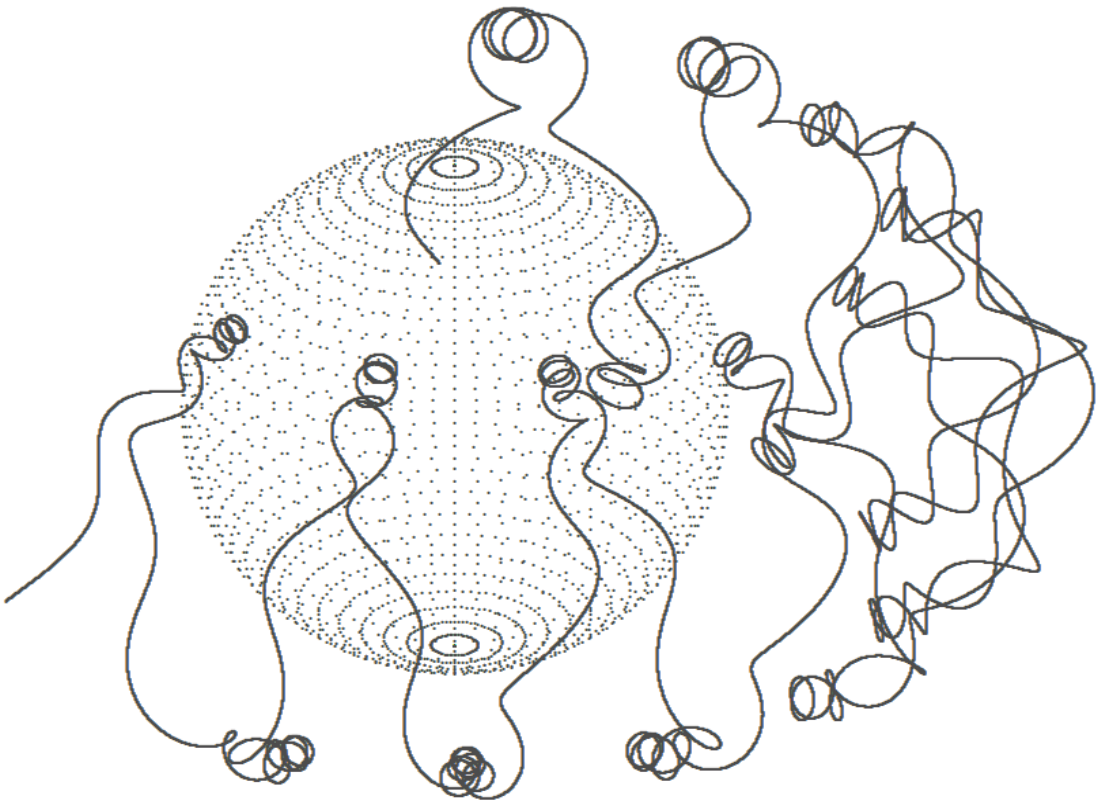
$$B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} M \frac{2\cos\theta}{r^3}, \qquad B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} M \frac{\sin\theta}{r^3} \qquad \text{et} \qquad B_\phi = 0,$$

d'où en coordonnées cartésiennes : $\vec{B}(x,y,z) = \frac{\mu_0 M}{4\pi r^5}[3xz\,\vec{i} + 3yz\,\vec{j} + (2z^2 - x^2 - y^2)\vec{k}]$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad \text{donne} \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{m\gamma_0}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \dot{v}_x = \frac{q}{m\gamma_0}(v_y B_z - v_z B_y) \\ \dot{v}_y = \frac{q}{m\gamma_0}(v_z B_x - v_x B_z) \\ \dot{v}_z = \frac{q}{m\gamma_0}(v_x B_y - v_y B_x) \end{cases}$$

Il n'y a pas de champ électrique, d'où $\gamma = \gamma_0 = cste$.
Clairement, nous n'envisageons pas ici une résolution analytique, nous réalisation une méthode numérique, pas à pas, pour résoudre ce système d'équations différentielles (voir RR pages 313 et 331).
Dans la magnétosphère terrestre nous avons un grand nombre de particules chargées piégées. Lors d'éruptions solaire, la magnétosphère est perturbée et certaines de ces particules parviennent dans l'atmosphère par les pôles et entre en collision avec ses molécules pour créer les aurores polaires.
Les particules sont des électrons et des protons, mais aussi quelques particules d'antimatière, les positrons et les antiprotons. Les antiprotons proviennent des rayons cosmiques, et a priori de notre galaxie. En effet, les réactions de fusion au sein du Soleil ne sont pas assez hautes en énergie pour les créer.
Dans la gigantesque magnétosphère de Jupiter, la quantité d'antimatière piégée est estimée à 9 kg !

Simulation numérique : cas d'un anti-proton de 500 MeV dans la magnétosphère terrestre



Résumé des notions vues aujourd'hui :

Cours 6 – DYNAMIQUE RELATIVISTE

- Collisions et référentiel barycentrique
- Cas des rayons cosmiques : désintégration d'un pion
- Relation fondamentale de la dynamique
- Cas d'un champ magnétique uniforme
- Cas d'un champ électrique uniforme
- Cas de champs électrique et magnétiques uniformes (covariance)
- Application à une magnétosphère (simulation numérique)

Pour réviser et s'exercer :

- Feuille d’exercice n°3 : exercice 4.
- Chapitre 7 du livre RR pages 227 et 228. Exercice 8, question 1, p252 pour l'explication de la force de Lorentz.
- Chapitre 9, p331, exercice 11, La magnétosphère, (exercice 4, explication pour la simulation numérique).

Feuille d'exercices n°3

Quadrivecteurs et conservation de l'énergie-impulsion

Exercice 1 Cours: depuis $\widetilde{u}=\gamma(c,\vec{v})$ montrer que $\widetilde{w}=(\gamma^4\vec{a}.\vec{\beta}\ ,\ \gamma^4(\vec{a}.\vec{\beta})\vec{\beta}+\gamma^2\vec{a})$.

Exercice 2 Un fusée a un mouvement rectiligne à accélération propre a_p constante.
Les conditions initiales dans le référentiel inertiel *R* sont : à *t=0*, *v=0*, *x=0* et $\vec{a}(t=0)=a_p\,\vec{i}$.
1) Donner $\widetilde{w}_{R_p}$ dans le référentiel inertiel coïncidant au référentiel propre.
2) Appliquer la transformée de Lorentz pour obtenir la quadri-acceleration $\widetilde{w}_R$.
3) Demontrer que $a(t)=a_p/\gamma^3$.
4) Trouver les expressions $v(t)=\dfrac{a_p t/c}{\sqrt{1+(a_p t/c)^2}}$ et $\gamma(t)=\sqrt{1+a_p^2t^2/c^2}$.
5) Établir l'équation de l'hyperbole : $c^2t^2-(x+c^2/a_p)^2=-c^4/a_p^2$.
6) À partir de $\tau=\int\gamma\,dt$ montrer la relation suivante pour le temps propre : $\tau=argsh(a_p t/c)$.

Exercice 3 Dans le référentiel galactique supposé inertiel, une fusée va à la vitesse constante de 70% de *c*. La fusée tire un proton avec un angle de 45° par rapport à la direction avant et avec une vitesse de 90% de *c* dans le référentiel de la fusée. Trouvez les composantes de la vitesse du proton dans le référentiel galactique en utilisant deux méthodes :

1) Utiliser la 4-vitesse $\widetilde{u}$ et sa covariance.
2) Demontration à l'aide de la transformée spéciale de Lorentz : utiliser les formules suivantes pour la vitesse exprimée dans *R*, $\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$, et dans *R'*, $\vec{v}\,'=(v'_x,v'_y,v'_z)$:

$$\vec{v}\,'=\left(\frac{v_x-u}{1-\dfrac{u\,v_x}{c^2}},\frac{v_y}{\gamma\left(1-\dfrac{u\,v_x}{c^2}\right)},\frac{v_z}{\gamma\left(1-\dfrac{u\,v_x}{c^2}\right)}\right)\quad\text{avec}\quad\vec{v}_{R'/R}=u\,\vec{i}\ .$$

Exercice 4 Désintégration à deux corps

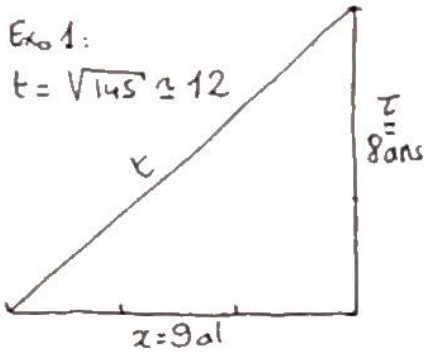
Dans le référentiel inertiel du laboratoire *R*, un méson K^+ au repos, se désintègre en un méson π^+ et un méson π^0. Les masses au repos sont $m_{K^+}=987\,m_e$, $m_{\pi^+}=273\,m_e$, $m_{\pi^0}=264\,m_e$, m_e est la masse d'un électron, $m_e c^2=0{,}5\ MeV$.
1) a) Écrire les équations de conservation.
b) Montrer que l'énergie du π^+ obtenue est : $E_{\pi^+}=c^2\dfrac{m_{K^+}^2+m_{\pi^+}^2-m_{\pi^0}^2}{2\,m_{K^+}}$
c) Quelle est l'impulsion p_{π^+} du π^+ ?
d) Trouver les valeurs numériques de E_{π^+} en MeV et p_{π^+} en MeV/c.
2) *R'* est le référentiel propre du π^+. Determiner la vitesse $\vec{u}$ de ce référentiel inertiel par rapport à *R*.
3) Le pion chargé a une durée de vie moyenne propre de 26 ns, quelle est sa durée de vie et sa distance parcourue dans le laboratoire ?

Corrections

Cours 1 & 2

Exo 1 :

$t = \sqrt{145} \simeq 12$

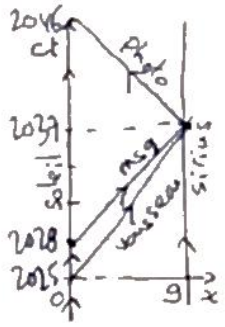


Arrivée en 2125 + 12 = 2137

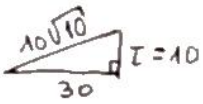
Vitesse $\simeq \frac{9}{12} c \simeq 75\%$ de c

Message reçu la même année que l'arrivée : 3 + 9 = 12

Photo reçu en 2046 (+9)

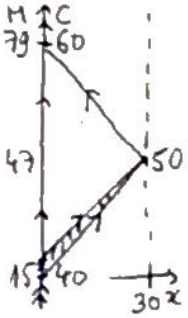


Exo 2 :



$\gamma = \sqrt{10} \simeq 3{,}16$

Au retour Maia a 79 et Carlos 60.



Les lettres envoyés entre les 15 et 16,6 ans de Maria arriveront avant l'arrivée de Carlos sur Sirius : 19 lettres

Exo 3 : $\Delta t = \gamma \tau$

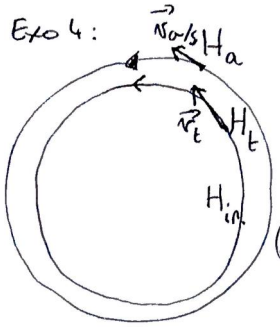
$\Delta t - \tau = \Delta t (1 - \sqrt{1-\beta^2})$

$= \frac{1}{2} \Delta t \beta^2$

$\simeq 0{,}47$ ns

dérive 0,125 ns OK

Exo 4 :



$(\Delta t)_t = \gamma_t (\Delta t)_{in.}$

$(\Delta t)_a = \gamma_a (\Delta t)_{in.}$

$= \gamma_a / \gamma_t \, (\Delta t)_t$

$(\Delta t)_{at} - (\Delta t)_a = (1 - \gamma_a/\gamma_t)(\Delta t)_t$

$\simeq \frac{1}{2} \cdot \frac{v_a^2 - v_t^2}{c^2} (\Delta t)_t$

$v_t = 4.10^7 / (24 \times 3600) \simeq 463$ m/s

$v_a = v_{a/sol} + v_t \simeq 741$ m/s

$\simeq 278$ m/s (−)

$\Delta t \simeq 161$ ms

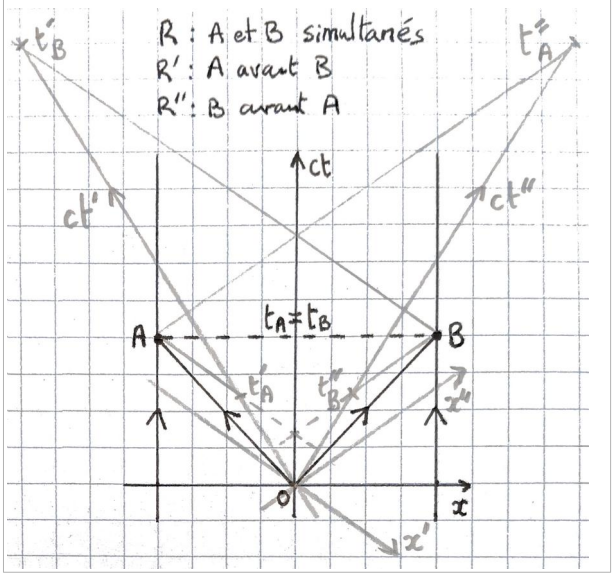
Horloge terrestre en avance

Vers l'Ouest : $\Delta t \simeq -86$ ms

Horloge terrestre en retard

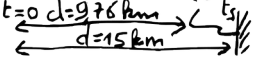
Est	H_a/H_{in}	264 ns	↑ +161 ns
	H_t/H_{in}	103 ms	↓ −86 ns
Ouest	H_a/H_{in}	16 ns	

Diagrammes pour le flash au milieu du wagon :



Exo 5 : $P(t) = \lambda e^{-\lambda t}$; $p = P(T > t_{sol}) = \int_{t_s}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-d/H}$ $\lambda = 1/\gamma\tau_0$ $\tau = \gamma \tau_0$

$H = \gamma \tau \beta c \simeq 6575$ m



15 km : $p \simeq 10{,}2\%$ 976 m : $p \simeq 22{,}7\%$

(Loi de durée de vie sans vieillissement, page 110, livre du même auteur : Calcul d'incertitudes)

Pour le paradoxe du train et du tunnel, voir pages 75 et 76 du livre du même auteur :
Voyage pour Proxima, Comprendre Einstein plus vite que la lumière !

a) $g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \quad g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2\cos\theta \\ 2\cos\theta & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}^1 \\ \sqrt{2} & 4 \end{pmatrix} \quad \|\vec{e}_1\| = 1 \quad \|\vec{e}_2\| = 2$

b) $dl^2 = d\vec{OM} \cdot d\vec{OM} = g_{ij} dx^i dx^j = g_{11} dx^1 dx^1 + g_{12} dx^1 dx^2 + g_{21} dx^2 dx^1 + g_{22} dx^2 dx^2$

$\Rightarrow dl^2 = dx^2 + 2\sqrt{2}^1 dx\,dy + 4dy^2$ (métrique) $\quad OA = \int_{\mathcal{C}} dl = \sqrt{\vec{OA}.\vec{OA}} = \sqrt{g_{ij} x_A^i x_A^j} = \sqrt{5+2\sqrt{2}}$

avec $\vec{OA} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \quad A(x_A^1 = 1 ; x_A^2 = 1)$

c) $\vec{v} = v^1 \vec{e}_1 + v^2 \vec{e}_2 = \vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2 \quad v^1 = 1 \quad v^2 = 1/2$

d) $g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j$ (Système de 4 éq. à 4 inc. : $g^{11} g_{11} + g^{12} g_{21} = \delta^1_1 = 1$ ...)

ou résolution matricielle : $g g^{-1} = Id \Rightarrow$ maxima

$$g^{-1} = (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1/2 \end{pmatrix}$$

e) $\vec{e}^i = g^{ij} \vec{e}_j$ ou $\vec{e}^i . \vec{e}_j = \delta^i_j \Rightarrow \vec{e}^1$ et $\vec{e}_2$ orthogonaux, de même pour $\vec{e}^2$ et $\vec{e}_1$.

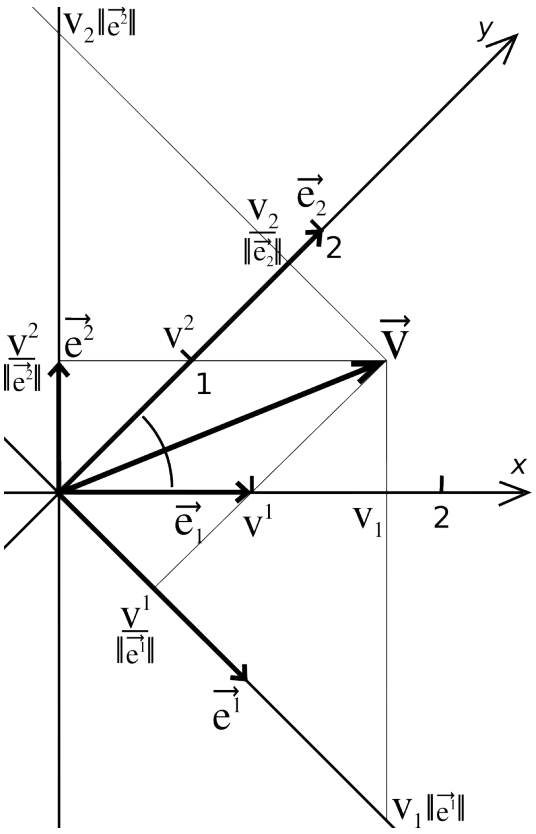
$\vec{e}^1 = g^{11}\vec{e}_1 + g^{12}\vec{e}_2 = 2\vec{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_2 \quad \vec{e}^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2 \quad \|\vec{e}^1\| = \sqrt{2} \quad \|\vec{e}^2\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

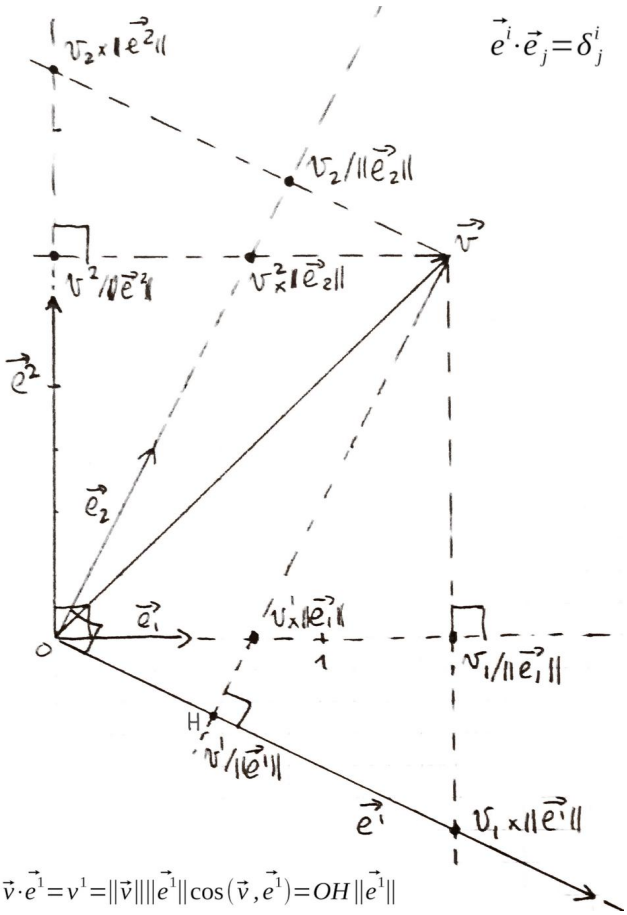
$v_i = g_{ij} v^j \quad v_1 = g_{11} v^1 + g_{12} v^2 = 1 \times 1 + \sqrt{2} \times \frac{1}{2} \Rightarrow v_1 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$

$v_2 = g_{21} v^1 + g_{22} v^2 = \sqrt{2} + 4 \times \frac{1}{2} \Rightarrow v_2 = \sqrt{2} + 2$

$\vec{v} = v_1 \vec{e}^1 + v_2 \vec{e}^2 = (1 + 1/\sqrt{2})\vec{e}^1 + (\sqrt{2} + 2)\vec{e}^2$

À gauche, la figure pour l'exercice 1. À droite, le cas général, avec les normes des vecteurs de base pour clairement montrer la symétrie entre les bases covariante et contravariante. Les composantes contrariantes d'un vecteur sont obtenues en projettant parallèllement à la base covariante. Les composantes covariantes d'un vecteur sont elles obtenues orthogonallement à la base covariante. Les phrases restent vraies en interchangeant les mots covariant et contravariant. Les deux bases ont des rôles interchangeables.





 $\vec{v} \cdot \vec{e}^1 = v^1 = \|\vec{v}\| \|\vec{e}^1\| \cos(\vec{v}, \vec{e}^1) = OH \|\vec{e}^1\|$

Calcul tensoriel : Introduction **Exercice 1**

1) i) $\tilde{a}.\tilde{b} = g_{ij} a^i b^j = g_{ij} b^j a^i = g_{ji} b^j a^i = g_{ij} b^i a^j = \tilde{b}.\tilde{a}$ (g symétrique / indices muets)

ii) $\tilde{a}.(\tilde{b}+\tilde{c}) = g_{ij} a^i (b^j + c^j) = g_{ij} a^i b^j + g_{ij} a^i c^j = \tilde{a}.\tilde{b} + \tilde{a}.\tilde{c}$

2) i) $\varepsilon_{321} = -\varepsilon_{123}$ ($3 \to 1$ / $1 \to 3$) $\Rightarrow$ $\varepsilon_{321} = -1$ ii) $\varepsilon^{123} = g^{1i} g^{2j} g^{3k} \varepsilon_{ijk}$ or $g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \varepsilon^{123} = g^{11} g^{22} g^{33} \varepsilon_{123} \Rightarrow \varepsilon^{123} = 1$ (un seul terme non nul sur g)

iii) $\varepsilon_{12k} \varepsilon^{12k} = \varepsilon_{123} \varepsilon^{123} + 0 + 0 = 1$ iv) $\varepsilon_{ijk} \varepsilon^{ijk} = 3 \times 2 \times 1 \times (\pm 1)^2 = 3!$

v) si $i \neq j$, $\varepsilon_{imn} = 0$ ou $\varepsilon^{imn} = 0$; si $i = j$, $\varepsilon_{imn} \varepsilon^{imn} = 3! = 2\delta_i^i = 2(\delta_1^1 + \delta_2^2 + \delta_3^3) = 6$ #

vi) $\varepsilon_{ijk} \varepsilon^{mnl} = \begin{vmatrix} \delta_i^m & \delta_i^n & \delta_i^l \\ \delta_j^m & \delta_j^n & \delta_j^l \\ \delta_k^m & \delta_k^n & \delta_k^l \end{vmatrix} = \delta_i^m (\delta_j^n \delta_k^l - \delta_k^n \delta_j^l) - \delta_i^n (\delta_j^m \delta_k^l - \delta_k^m \delta_j^l) + \delta_i^l (\delta_j^m \delta_k^n - \delta_k^m \delta_j^n)$

$\Rightarrow \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{mnk} = 3\delta_i^m \delta_j^n - \delta_i^m \delta_j^n - 3\delta_j^m \delta_i^n + \delta_i^n \delta_j^m + \delta_i^m \delta_j^n - \delta_i^n \delta_j^m$

$\Rightarrow \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{mnk} = \delta_i^m \delta_j^n - \delta_i^n \delta_j^m$ (v): $\varepsilon_{ijk} \varepsilon^{mjk} = \delta_i^m \delta_j^j - \delta_i^j \delta_j^m = \delta_i^m \times 3 - \delta_i^m = 2\delta_i^m$)

vii) $\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 b^3 - a^3 b^2 \\ a^3 b^1 - a^1 b^3 \\ a^1 b^2 - a^2 b^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1jk} a^j b^k \\ \varepsilon_{2jk} a^j b^k \\ \varepsilon_{3jk} a^j b^k \end{pmatrix} \Rightarrow (\vec{a} \wedge \vec{b})_i = \varepsilon_{ijk} a^j b^k$

viii) $(\vec{a} \wedge \vec{a})_i = \varepsilon_{ijk} a^j a^k = \varepsilon_{ijk} a^k a^j = -\varepsilon_{ikj} a^k a^j = -\varepsilon_{ijk} a^j a^k = 0$

ix) $(\vec{a} \wedge \vec{b})_i = \varepsilon_{ijk} a^j b^k \overset{\text{idem}}{=}_{\text{viii)}} -\varepsilon_{ijk} b^j a^k = -(\vec{b} \wedge \vec{a})_i$

x) $(\vec{a} \wedge \vec{b})^l = g^{li} (\varepsilon_{ijk} a^j b^k) = g^{li} \varepsilon_{ijk} g^{jm} a_m g^{kn} b_n = \varepsilon^{lmn} a_m b_n \Rightarrow (\vec{a} \wedge \vec{b})^i = \varepsilon^{ijk} a_j b_k$

xi) $(\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w} = \varepsilon_{ijk} u^j v^k w^i = u^j \varepsilon_{jki} v^k w^i = \vec{u}.(\vec{v} \wedge \vec{w})$

xii) $(\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}))_i = \varepsilon_{ijk} a^j \varepsilon^{kmn} b_m c_n = (\delta_i^m \delta_j^n - \delta_i^n \delta_j^m) a^j b_m c_n = b_i a^j c_j - c_i a^j b_j$