

Ascenseur d'Einstein : Lignes d'univers, expérience de Michelson-Morley et Paradoxe relativiste

Mathieu Rouaud

Chercheur indépendant, Boudiguen 29310 Querrien, France, mathieu137@gmail.com

(Publié en anglais dans [Physics](#) le 11 août 2022 - Traduction en français le 16 avril 2023)

Nous avons tous en tête la fameuse expérience de pensée d'Einstein dans l'ascenseur où nous observons la chute libre d'un corps puis la trajectoire d'un rayon lumineux. Ici, en plus de l'aspect qualitatif, nous menons les calculs exacts, et les équations des lignes d'univers sont données. Nous considérons un référentiel en translation rectiligne uniformément accéléré et nous montrons que les trajectoires des particules sont des demi-ellipses centrées sur l'horizon des événements. Le référentiel est non-inertiel, l'espace-temps est plat, et les calculs sont réalisés dans le cadre de la relativité restreinte. Certaines conséquences expérimentales sont discutées, en particulier l'expérience avec l'interféromètre de Michelson accéléré est résolue, et une expérience où apparaît un nouveau paradoxe relativiste – une particule de matière semble aller plus vite que la lumière – est décrite. Les écarts, par rapport au cas classique, sont importants à grande échelle et au niveau de l'horizon, mais ils sont faibles dans l'ascenseur où l'intérêt est avant tout théorique. Les concepts de métrique, de vitesse coordonnée et d'horizon sont discutés, et une analogie avec le trou noir est faite.

1. INTRODUCTION

Nous imaginons une portion d'espace vide infiniment éloignée de toutes masses et une grande boîte, dans laquelle un observateur évolue en apesanteur. À l'aide d'un crochet et d'une corde, une force constante est exercée sur la boîte ainsi animée d'un mouvement de translation rectiligne uniformément accéléré. L'observateur expérimente alors une pesanteur artificielle (figure 1). Nous allons étudier dans le référentiel de l'ascenseur le mouvement de la lumière, puis d'une particule massive, et, finalement, nous allons faire une comparaison avec la chute vers un trou noir lors d'un lâcher.

Dans le référentiel de la boîte, d'abord inertiel, un rayon lumineux se propage à la vitesse c selon une trajectoire rectiligne. Ensuite, la boîte est accélérée et un rayon, initialement perpendiculaire à la direction du mouvement, emprunte alors une trajectoire courbée. Citons Albert Einstein dans son livre *La relativité*^[1] : « la trajectoire du même rayon de lumière, comme il est facile de le montrer, n'est plus une ligne droite ».

Suite à la naissance de la relativité restreinte en 1905, l'expérience de pensée de l'ascenseur accéléré, proposée par Einstein dès 1908, a permis de filer l'analogie avec la gravité pour développer une intuition et guider la fondation de la *relativité générale*. Nouvelle théorie de la gravitation établie en 1915 qui supprime alors celle de Newton. Cette image a été utilisée pour illustrer le principe d'équivalence et prédire la déviation des rayons lumineux par un astre massif.

Néanmoins, il ne faut pas que le cheminement historique de la théorie nous cache un point essentiel : la déviation d'un rayon lumineux dans l'ascenseur accéléré s'explique pleinement dans le cadre de la relativité restreinte. En effet, dans le référentiel accéléré de l'ascenseur, l'espace-temps reste plat, nul champ de gravitation ici, et la déviation des rayons lumineux se comprend par un raisonnement purement cinématique.

Selon le second postulat d'Einstein, la vitesse de la lumière dans le vide est constante et égale à c dans tous les référentiels d'inertie. Une conséquence logique de ce postulat : dans un référentiel non-inertiel la vitesse de la lumière dans le vide, peut, a priori, être différente de c ¹. Une autre propriété : une particule libre suit une trajectoire rectiligne et uniforme dans un référentiel inertiel. Par conséquent, une particule libre peut suivre une trajectoire courbée dans un référentiel non-inertiel. Comme nous allons le montrer, c'est justement ce qui se passe ici pour le rayon lumineux.

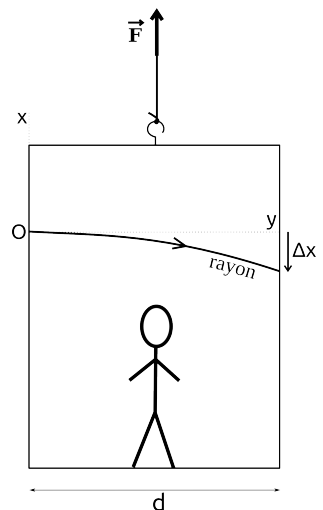


Fig.1 L'expérience de pensée dans l'ascenseur d'Einstein.

¹ Il reste, bien sûr, qu'un objet ne peut en aucun cas dépasser la vitesse de la lumière dans le vide, et que la vitesse de la lumière pour un observateur minkowskien local est toujours égale à c .

2. RÉFÉRENTIEL UNIFORMÉMENT ACCÉLÉRÉ

2.1. Système de coordonnées

Nous voulons décrire la physique du point de vue de l'observateur avec une accélération propre constante. Un référentiel est une entité physique, auquel nous associons un système de coordonnées pour s'y repérer. Nous commençons en utilisant la description de Desloge et Philpott ^[2]. Un référentiel uniformément accéléré, R , est défini à l'aide d'un ensemble d'observateurs qui restent au repos l'un par rapport à l'autre dans une hypothétique structure tridimensionnelle rigide. Nous imaginons un ensemble continu d'observateurs infinitésimaux chacun équipé d'une règle et d'une horloge. Un événement est spécifié de manière unique à l'aide de la ligne d'univers de l'observateur sur laquelle l'événement se produit. Pour définir le système de coordonnées, nous décidons d'assigner en ensemble de trois nombres (x, y, z) à chaque observateur, et un nombre t en chaque point de sa ligne d'univers. Un référentiel avec un système de coordonnées associé fournit un système de référence. Un système de référence est appelé "rigide" si la distance mesurée avec des règles standard au repos entre deux points de référence reste constante au cours du temps ^[3]. Pour un référentiel inertiel, R' , l'ensemble des horloges peut être synchronisé et t correspond au temps propre de chaque observateur au repos dans R' . Pour un référentiel non-inertiel, ce n'est plus possible et chaque observateur dispose d'une seconde horloge appelée "horloge coordonnée". Cependant, le référentiel uniformément accéléré reste rigide, car les relations entre les observateurs restent inchangées. Nous choisissons un observateur O de R utilisé comme référence : $x=0$, et dans son cas particulier les temps propre et coordonnée restent égaux. Desloge et Philpott font alors une étude à une dimension, dans cet article, l'étude est étendue aux trois dimensions spatiales en utilisant un accéléromètre. En reportant la règle autant que nécessaire dans la direction de l'accélération propre, donnée par un accéléromètre, nous assignons un x à chaque observateur X . Nous procédons de même dans deux directions orthogonales pour y et z . x est la direction verticale ascendante, et y et z sont les directions latérales.

Pour synchroniser toutes les horloges coordonnées, nous utilisons la méthode du radar. O émet un signal lumineux périodique, et chacun des autres observateurs X égalisent le rythme de leur horloge coordonnée avec celui du signal reçu depuis O . O envoie un signal à t_1 réfléchi par X et de retour en O à t_2 (figure 2). Lors de la réflexion en X le temps $t=(t_1+t_2)/2$ est assigné à son horloge coordonnée. Une horloge coordonnée peut être comparée à une horloge radio-controlée par l'horloge propre de O . Nous pouvons aussi synchroniser les horloges situées sur un même plan horizontal de R (le protocole est décrit dans la sous-section 3.3). Il y a invariance par translation selon y et z , et, dans ce cas, les horloges propres sont suffisantes, car le rythme des horloges est le même pour un x donné.

Rappelons la définition de Landau et Lifchitz ^[5] pour un système de référence, où les horloges peuvent être synchronisées sur tout l'espace, appelé "référentiel synchrone" : un référentiel, décrit par une métrique $g_{\mu\nu}$, où les composantes, avec un indice temporel et l'autre spatial, sont nuls, est synchrone. Comme nous le voyons dans la sous-section 2.2 qui suit, c'est le cas du référentiel uniformément accéléré : $g_{0i}=0$ avec $i=1,2$ ou 3.

Le système de coordonnées a été construit de manière intrinsèque avec les observateurs non-inertiels. Pour définir une accélération propre constante pour O dans un référentiel inertiel R' , nous considérons R' qui coïncide instantanément avec R , et il est alors facile de montrer que l'accélération propre, $\vec{a}_p$, est momentanément égale à l'accélération $\vec{a}$ de R' par rapport à R . À cet instant t' , toutes les horloges de R' et coïncidentes sont mises à zéro. Si plus tard à t , un deuxième référentiel inertiel R'' coïncide avec R , l'ensemble des horloges coordonnées de R sera encore synchronisé, et nous pourrions égaliser leurs dates avec un ensemble synchronisé d'horloges propre de R'' , par contre, l'ensemble des horloges propre de R ne sera plus synchronisé, surtout pour des valeurs importantes de x .

Revenons aussi sur la méthode pour mesurer la vitesse et l'accélération d'une particule. Quand une particule passe au voisinage d'un observateur, l'observateur a besoin de la collaboration des autres observateurs voisins ; ils peuvent utiliser l'une ou l'autre de leurs horloges – vitesse et accélération coordonnée, $v^\mu = dx^\mu/dt$ et $a^\mu = dv^\mu/dt$, respectivement, ou locales, $dx^\mu/d\tau$ et $d^2x^\mu/d\tau^2$. Dans un référentiel inertiel, la vitesse de la lumière est constante : nous pouvons indifféremment mesurer les distances avec une règle ou un radar. Dans un référentiel non-inertiel, la vitesse coordonnée de la lumière varie : les distances mesurées par chaque méthode sont en général différentes ^[6].

2.2. Métrique et changement de coordonnées

Dans cette sous-section, nous rappelons au lecteur des expressions connues et quelques notations sont introduites. Dans un référentiel non-inertiel, la métrique est non-minkowskienne. Nous considérons la métrique de l'espace-temps d'un observateur avec une accélération propre constante. Nous avons un référentiel

R en translation rectiligne et uniformément accéléré par rapport à R' inertiel. Ici, le système de coordonnées de Rindler (ct, x, y, z) ^[4] est utilisé et nous donnons la métrique pour une particule et une accélération propre constante $\vec{a}_p = -a_p \vec{e}_x$ avec $\vec{e}_x$ le vecteur unitaire selon la verticale ascendante x ^[7] :

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \left(1 + \frac{a_p x}{c^2}\right)^2 c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (1)$$

Le calcul montre que toutes les composantes du tenseur de courbure de Riemann sont nulles^[8], l'espace-temps est donc plat, et il existe un changement de coordonnées global qui permet de passer de R à R' ^[4] :

$$ct' = \left(x + \frac{c^2}{a_p}\right) \sinh\left(\frac{a_p t}{c}\right), \quad x' = \left(x + \frac{c^2}{a_p}\right) \cosh\left(\frac{a_p t}{c}\right) - \frac{c^2}{a_p}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad (2)$$

avec $\vec{e}_{x'} = \vec{e}_x$, $x'(t'=0) = x(t=0) = 0$ et $v'_{x'}(t'=0) = 0$.

Nous retrouvons la métrique de Minkowski dans R' : $ds'^2 = ds^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2$. Si le tenseur de courbure de Riemann avait une composante non nulle, l'espace-temps serait courbe, et il n'y aurait pas un tel changement global de coordonnées depuis le référentiel non-inertiel à celui inertiel. Ici, il y a un cadre min-kowskien sous-jacent.

Fig.2 Diagramme de Minkowski de la fusée dans le référentiel inertiel R' . La fusée uniformément accélérée a une ligne d'univers hyperbolique. Dans le référentiel R' , nous avons représenté les réseaux de lignes coordonnées de R' et R . Dans les deux cas, les lignes coordonnées d'espace et de temps sont orthogonales. Dans ce cas, la fusée définit un corps rigide de référence ^[2-4] par rapport auquel nous pouvons étudier la trajectoire des rayons lumineux.

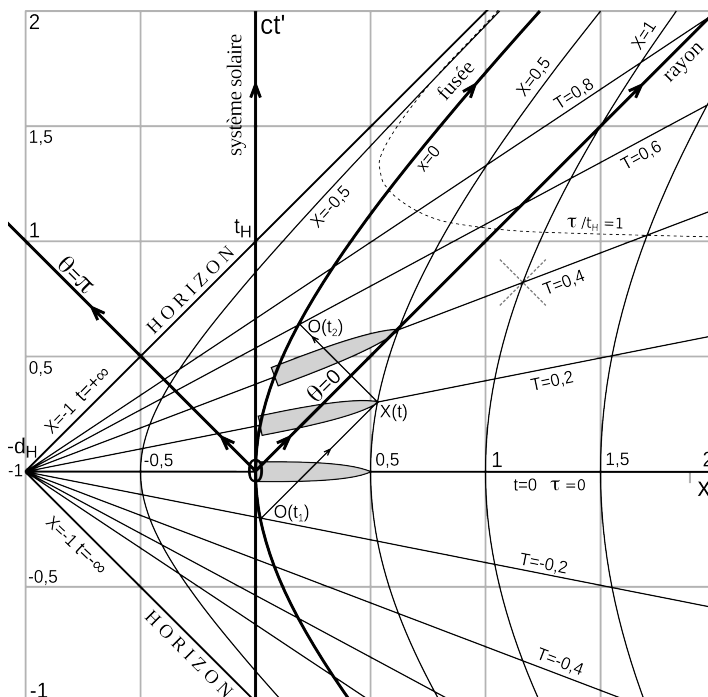
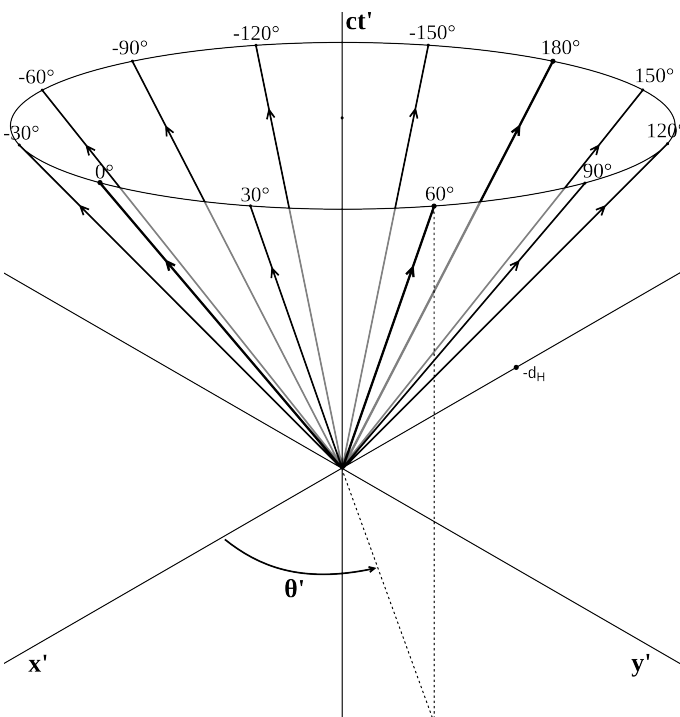


Fig.3 Les lignes d'univers de 12 rayons particuliers dans un diagramme de Minkowski (T', X', Y') avec $\theta'(t'=0)=\theta(t=0)$ comme conditions initiales.



Pour simplifier l'étude, nous utilisons des grandeurs sans dimensions. Pour les distances, $X=x/d_H$ avec la *distance d'horizon* $d_H=c^2/a_p$. Pour les temps, $T=t/t_H$ avec le *temps d'horizon* $t_H=c/a_p$. Pour une accélération équivalente à l'intensité de la pesanteur au niveau du sol terrestre, les grandeurs d'horizon valent environ une année-lumière et un an. Pour illustrer davantage nos propos, nous pourrions associer le référentiel R' au référentiel galactique où les étoiles sont supposées fixes, et remplacer le référentiel R de l'ascenseur par celui d'une fusée accélérée qui effectue un voyage interstellaire. L'hyperplan $x=-d_H$ définit l'horizon des événements comme une rupture du lien causal. Les astronautes verront la Terre, leur point de départ, s'éloigner puis s'arrêter à une année-lumière avec un temps propre figé à un an.

L'accélération propre des observateurs est inversement proportionnelle à la distance d'horizon : $a_p(X)=a_p/(1+X)$, ainsi la rigidité est assurée^[9].

3. RAYONS LUMINEUX

Nous pouvons maintenant établir, comme un nouveau résultat, les équations des lignes d'univers. Sans perdre en généralité, nous prenons comme condition initiale un rayon lumineux qui rentre dans l'ascenseur quand celui-ci a une vitesse nulle dans le référentiel inertiel. Toutes les horloges sont mises à zéro, et l'angle d'entrée du rayon est alors le même pour tous les observateurs (figure 3). Les trajectoires sont toutes placées dans le plan $z'=z=0$.

3.1. Rayons latéraux

Dans R' , la ligne d'univers du rayon a pour équations $Y'=T'$ et $X'=0$. Or $Y'=Y$, d'où^[4, 8] :

$$X=1/\cosh T-1, \quad Y=\tanh T \quad \Rightarrow \quad (X+1)^2+Y^2=1 \quad (3)$$

Le rayon décrit un quart de cercle de rayon d_H et de centre $(-d_H, 0)$ (figure 4). Pour un rayon lumineux, $d\tau=0$, d'où, $|\beta|=1+X$ avec $\beta=dL/dT$ et $L=\sqrt{X^2+Y^2}$. $|\beta|\neq 1$ car le système de coordonnées (x, t) utilise différentes méthodes physiques pour mesurer les distances et les temps : des règles pour x et l'horloge de O pour t . La vitesse coordonnée du rayon lumineux, d'abord égale à c , diminue et s'annule sur l'horizon en un temps infini. En effet, comme les composantes du tenseur métrique dépendent du point, la vitesse coordonnée correspond à la vitesse locale seulement pour l'observateur particulier O , alors que dans un référentiel inertiel cette vitesse gardait le même sens pour tous les observateurs. Par exemple, pour le référentiel en translation rectiligne uniformément accéléré, la notion de rigidité est maintenue, mais, par contre, on ne peut plus définir un ensemble d'horloges propres synchronisées sur la ligne d'univers d'une particule. Pour l'observateur placé en O , les mesures de ses observateurs placés à différents x avec leurs horloges coordonnées lui indiquent que tout va plus lentement plus bas, et plus vite plus haut. C'est pour cela que, de son point de vue, la lumière va plus lentement aux étages inférieurs, alors qu'un observateur plus bas mesure, là où il est avec son horloge propre, une vitesse de la lumière bien égale à c .

Pour comparaison, nous donnons les prédictions de la théorie de Newton : $X=-Y^2/2$ et $\beta=\sqrt{1-2X}$. Dans cette approximation, la trajectoire est parabolique et la vitesse de la lumière augmente vers l'infini.

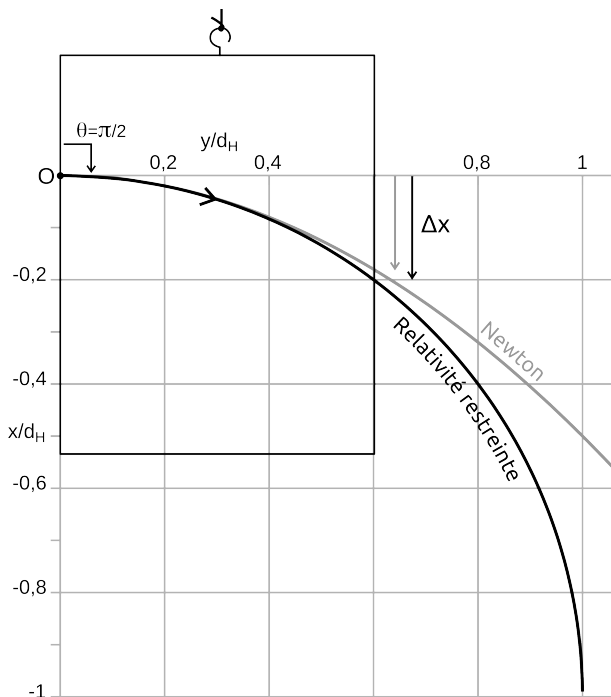
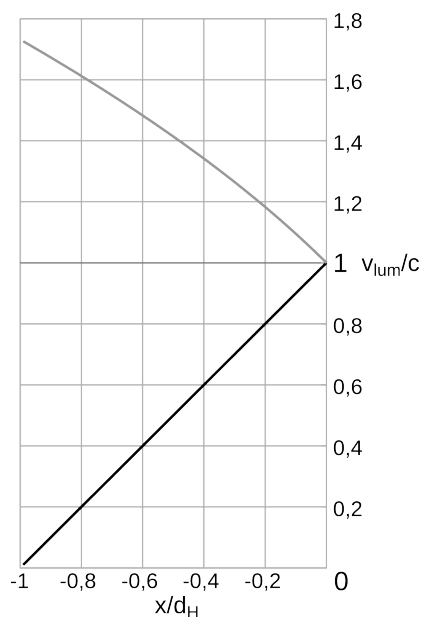


Fig.7 À droite, la vitesse de la lumière qui diminue et tend vers zéro en $x=-d_H$. Dans la théorie classique, il n'y a pas d'horizon et la vitesse de la lumière va en augmentant.

Fig.4 À gauche, la trajectoire du rayon tracée sur une paroi verticale de l'ascenseur est circulaire. La déviation est supérieure à celle de la trajectoire parabolique de Newton. Au niveau de l'horizon la déviation est double.



3.2. Rayons quelconques

En général, la ligne d'univers du rayon dans R' a pour équations $Y' = T' \sin \theta'$ et $X' = T' \cos \theta'$. Ainsi, dans R , le rayon lumineux décrit une trajectoire circulaire de rayon $d_H / |\sin \theta|$ et de centre $(-d_H, d_H / \tan \theta)$ (figures 5 et 6). La vitesse d'un rayon lumineux, quelles que soient les conditions initiales de la trajectoire, varie linéairement avec X . Si $X > 0$, le rayon va plus vite que c ; si $X < 0$ la vitesse de la lumière devient inférieure à c , et tend vers zéro quand X tend vers -1 (figure 7).

Imaginons que nous placions une feuille de dessin grand format sur la paroi verticale (Oxy) de l'ascenseur et que nous reproduisions au stylo le passage des rayons lumineux sur la feuille. Nous détachons ensuite le dessin, et, de retour dans un référentiel inertiel, nous le présentons à des géomètres, ceux-ci attesteront qu'il s'agit bel et bien d'arcs de cercles.

Pour les rayons verticaux nous donnons la vitesse et les équations des lignes d'univers :

$$\beta = dX/dT = \pm(1+X) \quad \text{d'où} \quad T = \pm \ln(1+X), \quad Y=0. \quad (4)$$

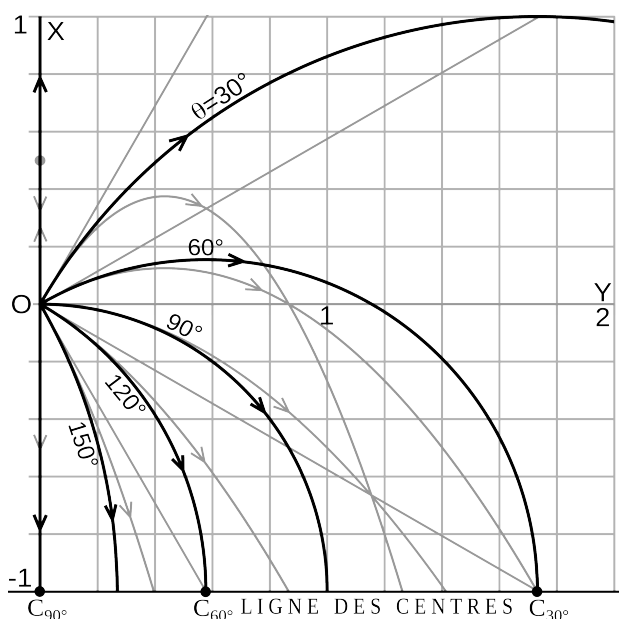
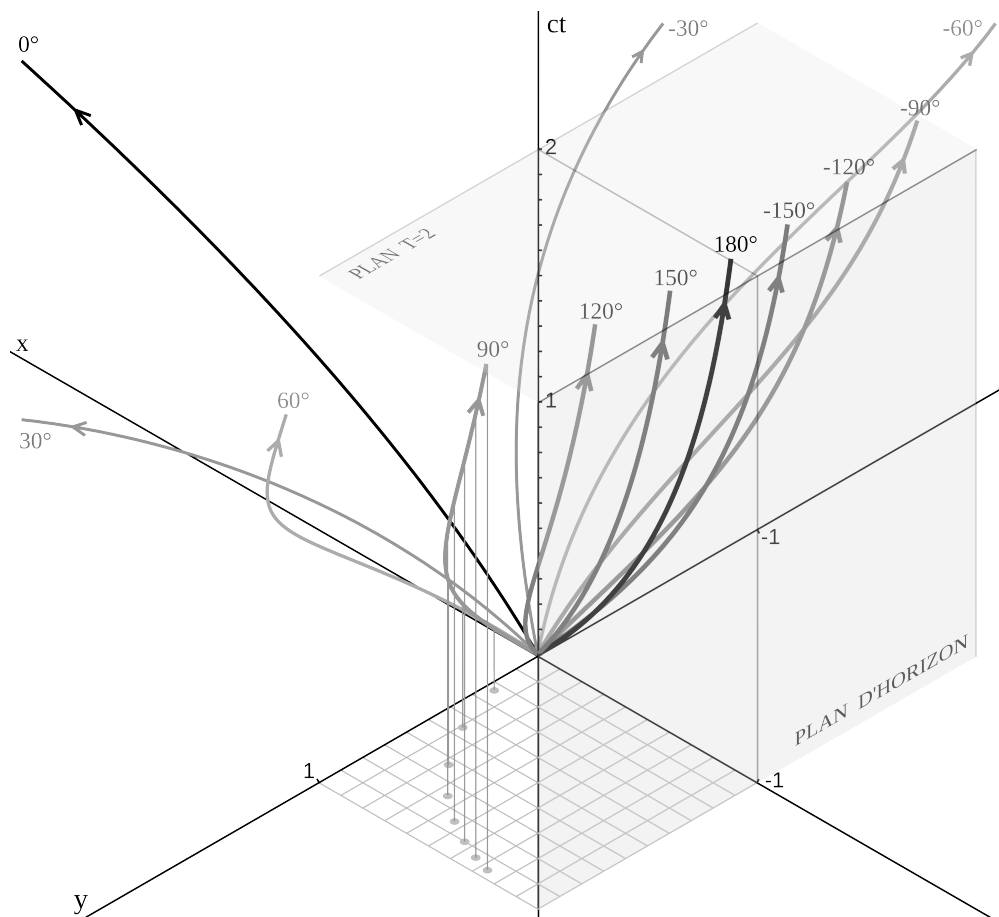


Fig.5 Dans le plan (X, Y) , les trajectoires des rayons lumineux non-verticaux sont des portions de cercles centrés sur l'horizon. Les rayons arrivent donc perpendiculairement à la ligne des centres qui s'identifie à l'horizon. Les lignes rectilignes grisées correspondent aux trajectoires inertielles, dans le cas où la fusée serait non accélérée. Les lignes grisées paraboliques sont les trajectoires newtoniennes. Pour de $\theta=0^\circ$, une différence notable par rapport à la théorie classique, la fusée relativiste ne peut dépasser le rayon envoyé vers l'avant.

Fig.6 Page suivante, le diagramme de Minkowski dans le référentiel non-inertiel (T, X, Y) . En dehors du cas limite $\theta=0$, tous les rayons lumineux suivent une ligne d'univers partiellement hélicoïdale qui rejoint asymptotiquement le plan d'horizon $x=-d_H$ en un temps t infini. La déviation maximale tend vers le demi-tour pour un rayon émit dans la direction proche de $\theta=0^\circ$.



3.3. Synchronisation horizontale

Pour synchroniser des horloges, nous pouvons utiliser des référentiels inertiels coïncidant, ou, la méthode radar directement depuis le référentiel non-inertiel. Dans un référentiel inertiel, les rayons lumineux sont rectilignes et la vitesse de la lumière est constante. Dans l'ascenseur d'Einstein les trajectoires sont circulaires et la vitesse de la lumière varie. Néanmoins, la méthode est analogue et le temps d'aller-retour permet de synchroniser l'horloge B avec celle en A . Il existe un angle θ pour lequel le rayon revient sur ses pas (figure 8).

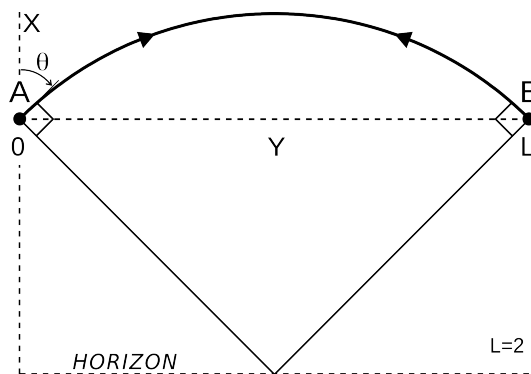


Fig.8 Deux horloges A et B au même niveau sont synchronisées avec la méthode radar. Un faisceau lumineux est émis par A , réfléchi en B par un système catadioptrique, et, de retour en A après $2\Delta t_{AB}$.

3.4. Distance radar

Dans un référentiel inertiel, il était équivalent d'utiliser une règle ou la méthode radar pour mesurer des distances. Dans la fusée, la géométrie de l'espace est euclidienne^[6] et l'utilisation de règles est naturelle ; par contre, la méthode radar doit être adaptée. Pour un couple d'horloges A et B dans un plan vertical, il existe un unique demi-cercle centré sur l'horizon qui passe par A et B , et donc un unique couple $(T=\Delta T, \theta)$ qui permet de déterminer position de B par rapport à A :

$$X = \frac{1}{\cosh T - \sinh T \cos \theta} - 1, \quad Y = \frac{\sinh T \sin \theta}{\cosh T - \sinh T \cos \theta} \quad \text{et} \quad L = \sqrt{X^2 + Y^2}. \quad (5)$$

Pour deux horloges au même niveau, l'intervalle de temps $2\Delta t$ de l'écho radar n'est plus proportionnel à la distance l , mais, nous pouvons néanmoins exprimer l en fonction de Δt :

$$X=0 \quad \Rightarrow \quad L = \sqrt{2(\cosh T - 1)} \quad \text{et} \quad \sin \theta = 1/\sqrt{1 + L^2/4} \quad (6)$$

Dans l'ascenseur, pour $l=10 \text{ m}$ et $a_p=10 \text{ m/s}^2$, nous pouvons continuer à considérer les rayons rectilignes et de vitesse c , en effet :

$$\delta \Delta T = \Delta T_{\text{inert.}} - \Delta T_{\text{non inert.}} = L - \text{arcosh} \left(1 + \frac{L^2}{2} \right) \approx \frac{L^3}{24} \quad \text{et} \quad \delta \Delta t \approx \frac{l^3 a_p^2}{24 c^5}. \quad (7)$$

D'où $\delta \Delta t \approx 1,7 \cdot 10^{-40} \text{ s}$, bien au-delà de la précision des meilleures horloges atomiques. Pour augmenter la distance à l'échelle du système solaire, nous pouvons aussi échanger des rayons lumineux entre deux fusées A et B dont les accélérations parallèles sont synchronisées. Sur une distance d'une unité astronomique $\delta \Delta t \approx 5,8 \text{ ns}$ pour $\Delta t \approx 8 \text{ m20s}$.

4. PARTICULES DE MASSE NON-NULLE

4.1. Trajectoires et lignes d'univers

La ligne d'univers de la particule dans R' a pour équations $Y' = \beta_0 T' \sin \theta'$ et $X' = \beta_0 T' \cos \theta'$ avec $v_0 = \beta_0 c$ la vitesse initiale. Le calcul donne $(X+1)^2/R_x^2 + (Y-Y_c)^2/R_y^2 = 1$ avec $R_x = a/d_H = 1/\sqrt{1 - \beta_0^2 \cos^2 \theta}$ et $R_y = b/d_H = \beta_0 |\sin \theta| R_x^2$. La particule décrit une trajectoire elliptique de demi-grand axe a , de demi-petit axe b et de centre $(-d_H, \beta_0^2 \sin \theta \cos \theta R_x^2 d_H)$ (figures 9 et 10).

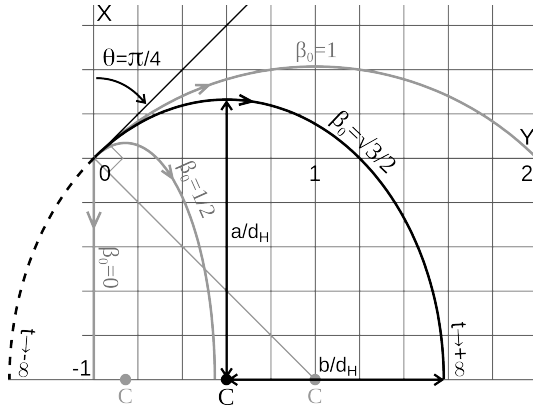


Fig.9 Ci-dessus, dans le plan (X, Y) , les trajectoires des particules des portions d'ellipses avec le centre C sur l'horizon. Les trajectoires sont perpendiculaires à la ligne d'horizon. La trajectoire de $t \rightarrow -\infty$ à $t \rightarrow +\infty$ est une demi-ellipse, ou un demi-cercle pour une particule de masse nulle.

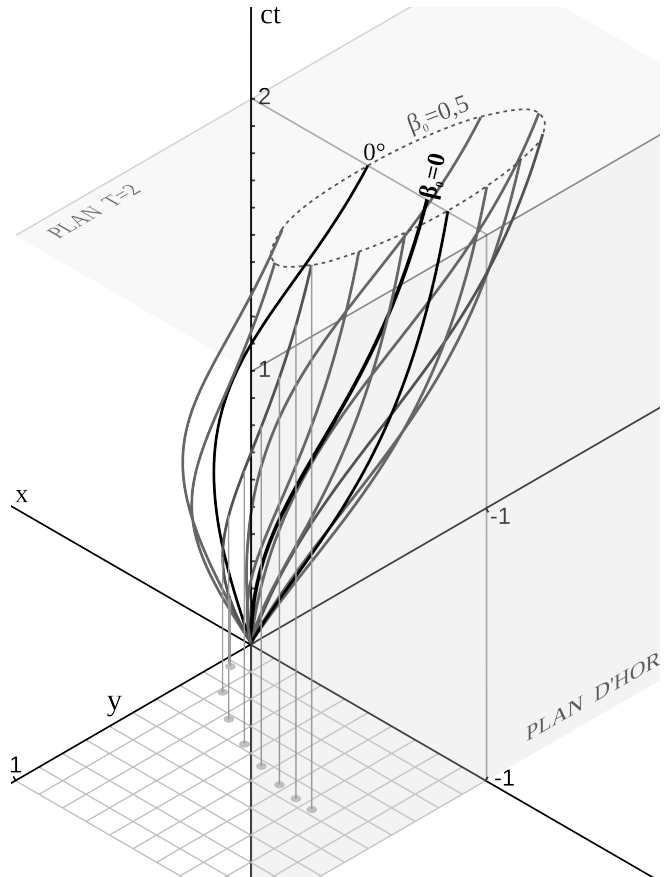


Fig.10 À droite, le diagramme de Minkowski dans le référentiel non-inertiel (T, X, Y) . Lignes d'univers pour $v_0=50 \%$ de c . En gras, la ligne d'univers pour un lâcher. L'intersection entre un plan horizontal et le tube d'univers, formé par l'ensemble des lignes d'univers pour différents θ et un β_0 donné, forme aussi une ellipse (courbe en pointillés).

Nous obtenons les équations générales des lignes d'univers représentées sur la figure 10 :

$$X = \frac{1}{\cosh T - \beta_0 \sinh T \cos \theta} - 1 \quad \text{et} \quad Y = \frac{\beta_0 \sinh T \sin \theta}{\cosh T - \beta_0 \sinh T \cos \theta}. \quad (8)$$

4.2. Vitesse et accélération pour un lâcher

Dans cette sous-section et la suivante, les résultats connus sont résumés pour comparer avec le trou noir, et les analogies et différences sont explicitées. La vitesse initiale est nulle et le mouvement est vertical :

$$\begin{cases} X = \frac{1}{\cosh T} - 1 \\ \beta = \frac{dX}{dT} = -\frac{\tanh T}{\cosh T} = -\sqrt{1 - (X+1)^2} (X+1) \\ A = \frac{d\beta}{dT} = \frac{\cosh^2 T - 2}{\cosh^3 T} = [1 - 2(X+1)^2] (X+1) \end{cases} \quad (9)$$

Nous avons : $v_{\max} = c/2$ en $x(v_{\max}) = 1/\sqrt{2} - 1 \simeq -0,3$ ^[2,10]. Au départ, la vitesse augmente, puis elle diminue pour s'annuler sur l'horizon (figure 11). L'accélération d'abord négative, s'annule puis devient positive (figure 12). L'observateur de l'ascenseur peut dans un premier temps interpréter les effets métriques comme une force d'inertie d'entraînement analogue à la gravitation, mais ensuite ses mesures l'amèneront à interpréter une force répulsive à l'approche de l'horizon. Ce sont des effets de perspective spatiotemporels vécus par les observateurs de la fusée. Ces effets métriques dus au caractère non-inertiel du référentiel sont parfois décrits en termes des forces fictives, car la particule dans R' inertiel ne subit aucune force et suit une trajectoire rectiligne et uniforme.

Fig.11 Vitesse de chute d'une particule lâchée sans vitesse initiale depuis O à $T=0$. En gris, le cas classique.

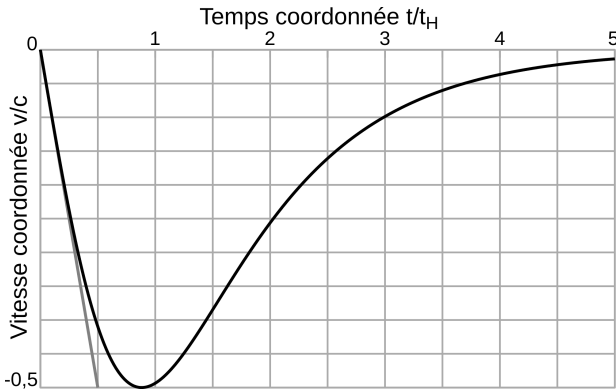
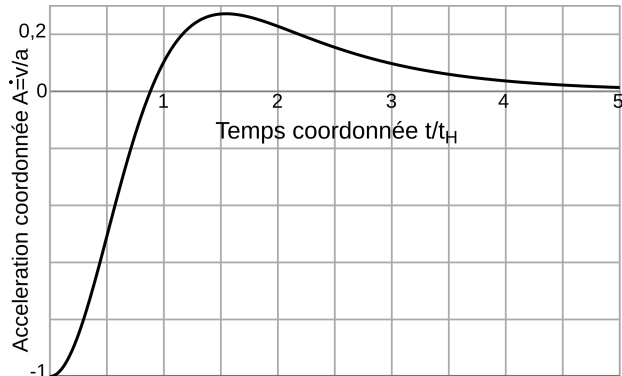


Fig.12 Accélération de la particule en chute libre dans le référentiel uniformément accéléré.



Pour des observateurs minkowskiens, instantanément au repos dans des référentiels inertiels successifs qui coïncident à chaque instant avec R : $dt_{\text{Mink}} = (1+X)dt$ d'où $v_{\text{Mink}}(x_{v_{\max}}) = c/\sqrt{2} \simeq 71\% c$ soit $v_{\max} = v_{\text{lum}}/\sqrt{2}$.

Pour le temps propre, la métrique donne $\tau(X) = t_H \sqrt{1 - (1+X)^2}$. Ainsi, dans le plan $(\tau/t_H, X)$ nous avons un quart de cercle. Par exemple, comme montré à la figure 13, quand la vitesse de chute est maximale, $T = \text{arcosh } \sqrt{2} \simeq 0,9$ et $\tau/t_H = 1/\sqrt{2} \simeq 0,7$. Et pour l'observateur de la fusée en O , le temps de l'objet en chute libre se fige, et tend vers t_H quand le temps de l'horloge en O tend vers l'infini. Lorsque un observateur en chute libre traverse l'horizon, en dehors de la rupture du lien causal avec la fusée, rien de particulier ne se passe et son temps propre continue à s'écouler indéfiniment.

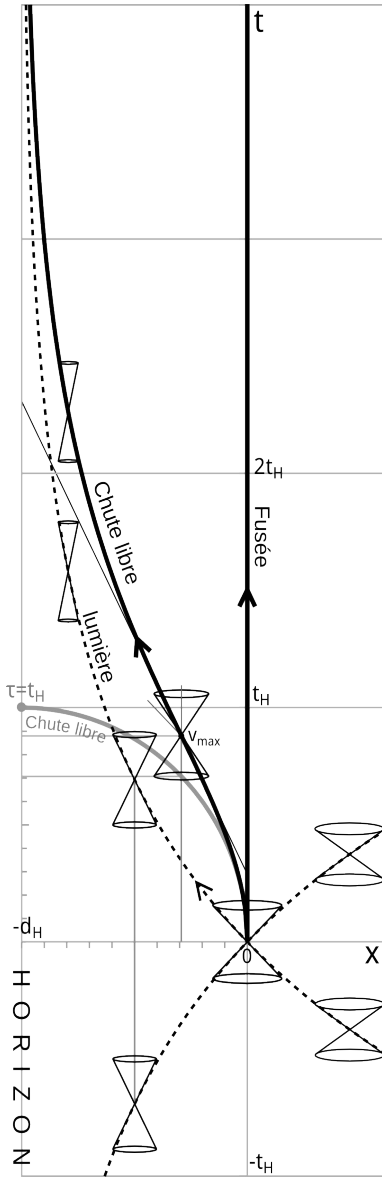


Fig.13 À gauche, le diagramme de Minkowski dans le référentiel non-inertiel (T, X). Les cônes indiquent comment la vitesse coordonnée de la lumière varie par rapport à c .

4.3. Comparaison avec le trou noir

Pour élargir notre vue, nous allons nous intéresser à un autre référentiel non-inertiel, R , décrit par la métrique de Schwarzschild. Nous avons un observateur à grande distance d'un astre sphérique, statique, neutre et de masse M . Il y a aussi un horizon et les courbes de vitesse et d'accélération présentent des analogies. Par contre : l'espace-temps est courbe ; il n'y a pas de changement de coordonnées global vers un référentiel inertiel sous-jacent ; des effets de marée vont être présents ; la chute libre n'est plus adiabatique à cause de l'émission d'ondes gravitationnelles ; et, la métrique change pendant la chute si le corps est de masse non négligeable devant l'astre principal^[11-13]. Nous allons utiliser l'approche lagrangienne pour déterminer l'équation du mouvement. La particule en chute libre maximise son temps propre et suit une géodésique. Nous limitons l'étude à la chute radiale adiabatique d'une masse test avec une vitesse initiale nulle à l'infini. L'équation différentielle est ensuite résolue par une approche numérique pour le tracé des courbes.

La métrique et le lagrangien ($\mathcal{L}$) pour une particule :

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = g(r) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{g(r)} \quad \text{avec} \quad g = 1 - \frac{r_s}{r} \quad \text{et} \quad r_s = \frac{2GM}{c^2} \quad (10)$$

$$\tau = \int \mathcal{L}(r, v) dt, \quad \mathcal{L} = \sqrt{g - \frac{\beta^2}{g}} \quad \text{et} \quad \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} v = cste. \quad (11)$$

Ici, r, G désignent respectivement la distance radiale au centre du trou noir et la constante universelle de gravitation.

Nous obtenons, avec $R = r/r_s$, $T = t/t_s$, $t_s = r_s/c$ et $a_s = c^2/r_s$:

$$\beta = -\left(1 - \frac{1}{R}\right) \frac{1}{\sqrt{R}} \quad \text{et} \quad A = \frac{d\beta}{dT} = \frac{\ddot{r}}{a_s} = \frac{1}{2R^2} \left(1 - \frac{1}{R}\right) \left(\frac{3}{R} - 1\right). \quad (12)$$

Nous avons $v_{max} = 2/(3\sqrt{3})c \approx 38\% c$ en $r(v_{max}) = 3r_s$ ^[14]. Ici aussi la vitesse passe par un maximum et l'accélération change de signe (figure 14 et 15). Les effets métriques correspondent à la gravitation, ils ne peuvent être annulés sur tout l'espace par un changement de coordonnées et ils sont bien réels.

Pour des observateurs minkowskiens : $dt_{Mink} = \sqrt{g} dt$ et $dr_{Mink} = dr/\sqrt{g}$ d'où $v_{Mink}(r_{v_{max}}) = c/\sqrt{3} \approx 58\% c$ soit $v_{max} = v_{lum}/\sqrt{3}$ avec $v_{lum}(r_{v_{max}}) = 2/3c$.

Pour le temps propre, la métrique donne $\tau(R) = 2/3 (R_0^{3/2} - R^{3/2}) t_s$. Par exemple, comme montré à la figure 16, avec la condition initiale $\tau=0$ à $T=0$ en $R_0=10$, quand la vitesse de chute est maximale, $T \approx 21$ et $\tau/t_s \approx 18$. Pour un observateur extérieur au trou noir, le temps de l'objet en chute libre se fige sur l'horizon quand le temps de son horloge tend vers l'infini. Alors que pour l'observateur en chute libre, il s'écoule un temps propre fini d'environ $2,8 t_s$ entre la vitesse maximale et la traversée de l'horizon, et, en dehors de la brisure du lien causal avec l'extérieur, rien de particulier ne se passe à la traversée. Il s'ajoute ensuite $2/3 t_s$ de temps propre jusqu'à la singularité, où l'observateur est détruit.

Fig.14 Vitesse de chute d'une particule lâchée sans vitesse initiale depuis l'infini. En gris foncé, la courbe selon les lois de Newton. En pointillés, la vitesse de la lumière. En gris clair, la vitesse de l'observateur local.

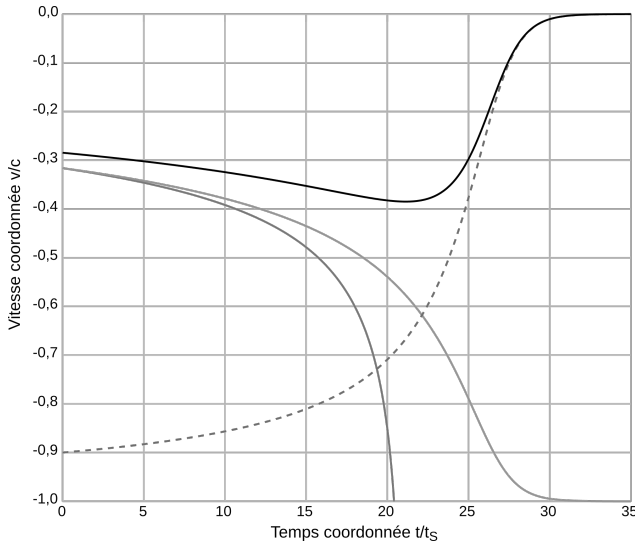


Fig.15 Accélération de la particule en chute radiale vers un trou noir. En grisé, la courbe classique.

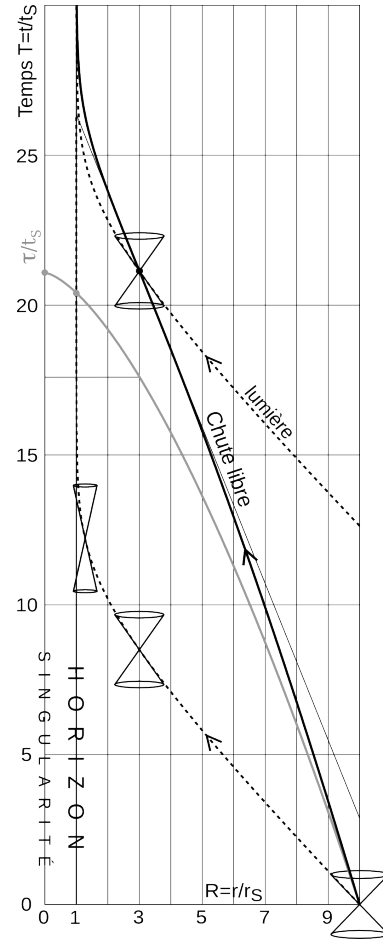
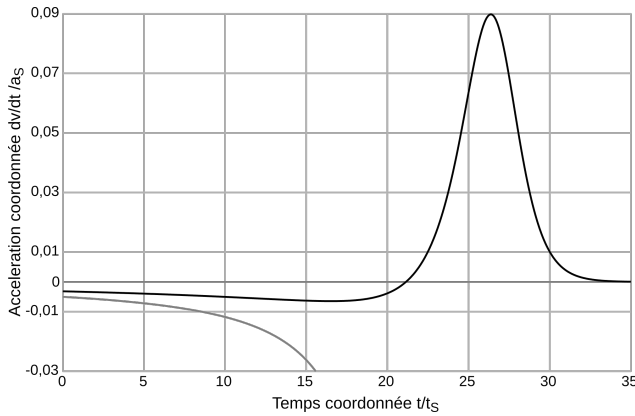


Fig.16 Diagramme de Minkowski dans le référentiel de Schwarzschild (T, R)^[15,16].

5. ASPECTS EXPÉRIMENTAUX

Avec l'équation (8) des lignes d'univers, de nouvelles expériences peuvent être proposées.

5.1. Mesure de la déviation

Il est difficile de mesurer la différence expérimentalement. Nous pouvons disposer d'une fusée accélérée, mais sa largeur, d , est très petite devant la distance d'horizon d_H , et, par conséquent, l'écart observé est infime. L'écart dépend du rapport $D=d/d_H$. Nous effectuons un développement limité :

$$X = R_x \sqrt{1 - (D - Y_C)^2 / R_Y^2} - 1 \simeq \underbrace{\frac{D}{\tan \theta}}_{\text{traj. rect.}} - \underbrace{\frac{D^2}{2\beta_0^2 \sin^2 \theta}}_{\text{corr. parabol.}} + \underbrace{\frac{D^3}{2\beta_0^2 \sin^2 \theta \tan \theta}}_{\text{corrections elliptiques}} - \left[\frac{D^4}{8\beta_0^4} \right]_{\theta = \pm \frac{\pi}{2}} + \dots \quad (13)$$

Le terme en D^2 correspond au premier ordre non nul de la déviation due au caractère non-inertiel du référentiel. Les termes D^3 et au-delà correspondent à l'écart entre la théorie classique et la relativité restreinte.

Pour $d=10 \text{ m}$, $a_p=10 \text{ m/s}^2$ et $\theta=45^\circ$, on a $|\Delta x| \approx 11 \text{ fm}$ pour la correction parabolique d'un rayon lumineux, ou, pour la correction elliptique d'une particule de masse non-nulle de vitesse $v_0=10 \text{ m/s}$ (tir en cloche).

La déviation est extrêmement faible et une mesure directe semble hors d'atteinte.

5.2. Désynchronisation des horloges

Par contre, avec la précision des horloges atomiques, l'écart temporel est accessible expérimentalement. Par exemple, lançons vers le haut une horloge selon un mouvement vertical (figure 17).

Considérons une hauteur maximale atteinte de $h=45\text{ m}$. À son retour, lorsque l'horloge mobile retombe en chute libre au niveau de l'horloge restée en $X=0$, avec $a_p=10\text{ m/s}^2$ et $v_0\approx 30\text{ m/s}$, la différence de temps entre les deux horloges vaut $\Delta t\approx 10\text{ fs}$ pour un temps de vol de 6 s . Pour $\theta=0$, avec $\gamma_0=1/\sqrt{1-\beta_0^2}$ et $H=h/d_H$, un développement selon β_0 donne^[8]:

$$\Delta t/t_H = \tau/t_H - T = 2(\gamma_0\beta_0 - \text{arctanh}\beta_0) \approx \beta_0^3/3$$

$$\text{avec } H = \gamma_0 - 1 \approx \beta_0^2/2, \text{ et } \Delta t \approx v_0^3/(3a_p c^2) \quad (14).$$

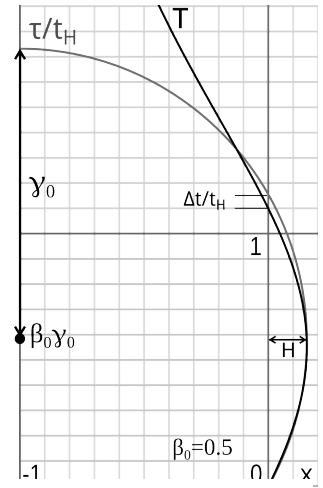


Fig.17 Diagramme de Minkowski (T , X) pour un lancer vertical. $\tau/t_H(X)$ trace un arc de cercle.

5.3. Interféromètre de Michelson

Nous connaissons la célèbre expérience de Michelson et Morley réalisée à partir de 1881 et qui a permis de démontrer la non-existence de l'éther. La vitesse de la lumière est donc la même dans tous les référentiels d'inertie. Que se passe-t-il maintenant si nous réalisons l'expérience dans le référentiel accéléré ?

Dans un référentiel inertiel, ou, ici, à l'horizontale dans R , les rayons mettent le même temps pour effectuer leur aller-retour sur chacun des bras et il n'y a pas de différence de marche δ en I (figure 18).

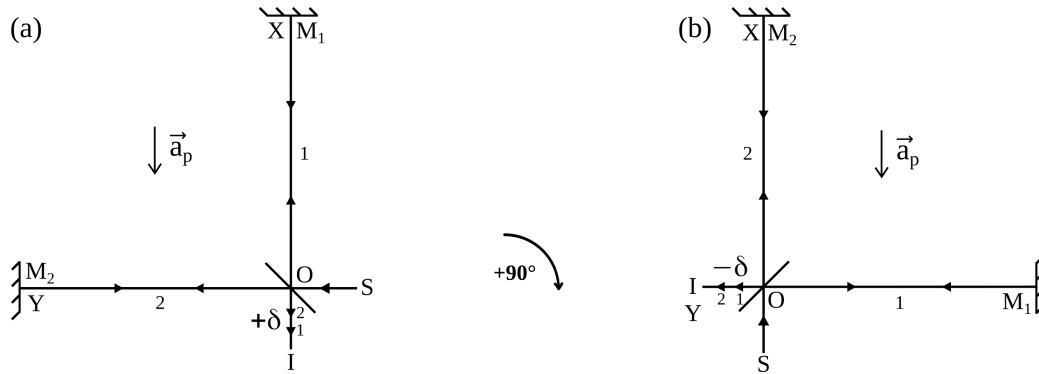


Fig.18 Interféromètre de Michelson constitué de deux bras OM_1 et OM_2 de même longueur l : une source de lumière cohérente S , comme celle d'un laser, émet un rayon lumineux qui rencontre en O un miroir semi-réfléchissant, ainsi la moitié de la lumière est transmise au miroir M_1 tandis que l'autre moitié est réfléchi par M_2 . Les deux faisceaux se recombinaient en O et interfèrent sur le détecteur I . Dans un référentiel inertiel, il n'y a pas de différence de marche. (a): dans le référentiel non-inertiel, R , il y a une accélération propre $\vec{a}_p$ selon la direction verticale descendante, ainsi le rayon selon X revient en premier et une différence de marche δ apparaît. (b): Le bras OM_2 selon l'axe des Y tourne jusqu'à l'axe de X pour prendre la place du bras OM_1 . L'ordre d'arrivée des rayons en I est inversé.

Nous tournons ensuite l'interféromètre selon l'axe (OM_2) de manière à placer le bras 1 vers le haut. Comme la lumière va plus vite que c pour X positif le rayon 1 qui effectue un aller-retour vertical reviendra avant le rayon 2 : d'après Éq. (4), pour un aller-retour du rayon 1, $T = 2 \ln(1+L) \approx 2L - L^2$ avec $L = l/d_H$. Le rayon 2 suit des arcs de cercles, mais cet effet produit une variation de moindre ampleur et nous pouvons considérer l'aller-retour horizontal rectiligne : d'après Éq. (3), pour un aller-retour du rayon 2, la trajectoire circulaire latérale se replie sur M_2 et $T = \text{arctanh}(2L) \approx 2L + 8/3 L^3$. Nous tournons à nouveau l'interféromètre de 90° mais cette fois selon l'axe (Oz), comme indiqué sur la figure 18. La situation est inversée et c'est maintenant le rayon 2 qui arrive en premier. Nous avons tracé les lignes d'univers pour la configuration (a) de la figure 18 sur la figure 19.

Nous en déduisons la valeur de la différence de marche et le nombre de franges n_g qui défilent en basculant l'interféromètre de (a) à (b) :

$$n_g = \frac{2\delta}{\lambda} = \frac{2}{\lambda} [\text{arctanh}(2L) - 2 \ln(1+L)] d_H \approx \frac{2a_p l^2}{c^2 \lambda} \quad (15)$$

où λ désigne la longueur d'onde.

Pour $a_p=10 \text{ m/s}^2$, un bras de longueur $l=10 \text{ m}$ et $\lambda=600 \text{ nm}$, le calcul donne $n_g \approx 0,4 \cdot 10^{-7}$. La variation vaut moins d'un dix millionième de frange. Plus a_p et l seront grands, et λ petit, plus l'effet sera appréciable. La cohérence spatiale des interférences n'est pas perdue suite au décalage vertical du rayon 2 : $|\Delta x| \approx 22 \text{ fm}$.

Aussi les bras ne sont pas parfaitement rigides et nous devons considérer les contraintes mécaniques exercées sur le bras vertical par l'accélération propre. Nous modélisons le bras par un cylindre homogène de masse volumique ρ et de module de rigidité E . D'après la loi de Hooke $\sigma=E\varepsilon$ avec σ la pression exercée et $\varepsilon=\Delta l/l$ la déformation relative. Le bras vertical devient plus court et le rayon fera l'aller-retour encore plus rapidement. Nous calculons la compression Δl en intégrant sur l'ensemble du bras, et nous en déduisons la différence de marche induite par a_p (accélération supposée constante le long du bras) :

$$\Delta l \approx \frac{\rho a_p l^2}{2E} \quad \text{d'où} \quad n_a \approx \frac{4\Delta l}{\lambda} \approx \frac{2\rho a_p l^2}{E\lambda} \quad \text{et} \quad \frac{n_a}{n_g} \approx \frac{\rho}{E} c^2. \quad (16)$$

Des matériaux très rigides et peu denses donnent une différence de marche de l'ordre d'une frange : $n_a \approx 1$. L'écart relatif n_a/n_g ne dépend pas de a_p , l ou λ mais seulement des propriétés mécaniques du matériau. L'effet métrique est des dizaines de millions de fois plus faible que celui dû aux contraintes mécaniques et il sera donc difficile à isoler expérimentalement. Dans un champ de gravitation, nous aurons les mêmes résultats, car la courbure d'espace-temps et les forces de marée n'apparaissent qu'aux ordres suivants des développements en série [8].

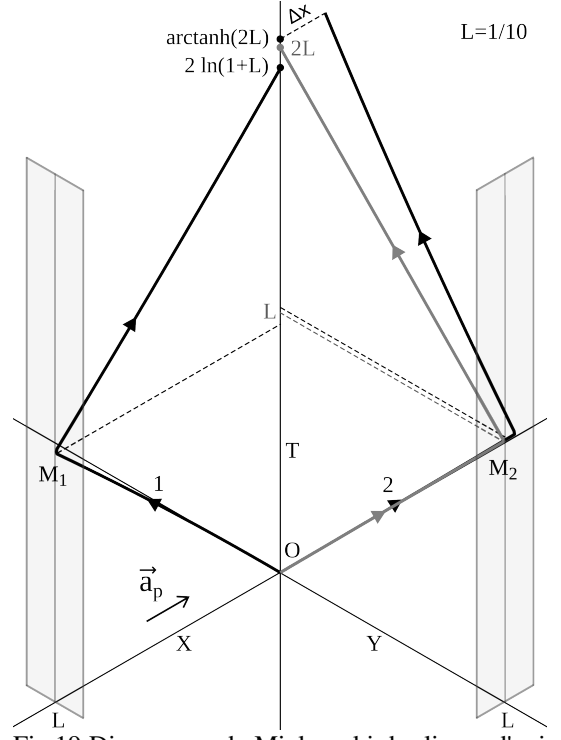


Fig.19 Diagramme de Minkowski des lignes d'univers des rayons selon les deux bras de l'interféromètre pour le cas (a) de la figure 18.

5.4. Expérience avec trois fusées

Nous matérialisons un solide accéléré à l'échelle d'un système stellaire en synchronisant les accélérations parallèles de trois fusées équidistantes (figure 20).

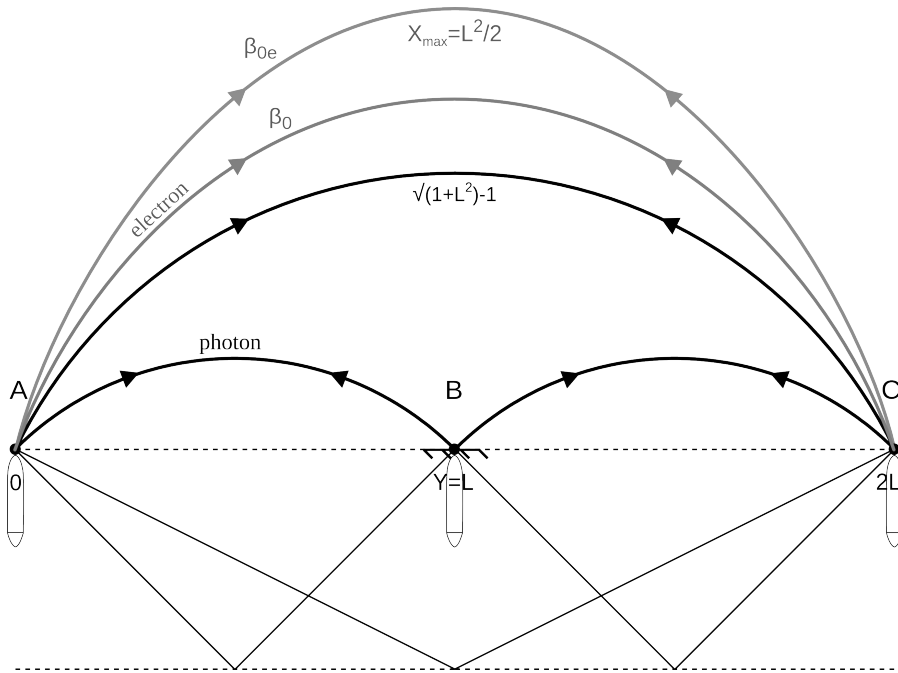


Fig.20 En noir, des signaux lumineux : $2\Delta T = T_{AB} + T_{BC} > T_{AC}$. En gris, il existe une vitesse initiale β_{0e} telle que : $2\Delta T = T_{AC}(\beta_{0e})$. Valeurs numériques pour $L=2$: $T_{AB} + T_{BC} = 2\Delta T \approx 3,53 > T_{AC} \approx 2,89$, $D_{AB} + D_{BC} = \sqrt{2}\pi < D_{AC} \approx 1,58\pi$. $\beta_{0e} = \sqrt{17/18} \approx 0,972$, $\gamma_{0e} = 3\sqrt{2}$, $D_{AC}(\beta_{0e}) \approx 1,94\pi$.

Les différences de distances et de temps pour les deux parcours ABCBA et ACA de rayons lumineux :

$$T_{ABCBA} - T_{ACA} = 4 \operatorname{arcosh}(1 + L^2/2) - 2 \operatorname{arcosh}(1 + 2L^2) \simeq L^3/2 \quad \text{pour } L \ll 1;$$

$$D_{ABCBA} - D_{ACA} = 8\sqrt{1 + L^2/4} \arctan \frac{L}{2} - 4\sqrt{1 + L^2} \arctan L \simeq -L^3/2 \quad (17)$$

Pour trois fusées A, B et C, distantes d'une unité astronomiques et $a_p = 10 \text{ m/s}^2$, $t_{ABCBA} - t_{ACA} \simeq 69 \text{ ns}$.

Si nous présupposons que, comme dans un référentiel inertiel, la vitesse de la lumière est constante, nous obtenons un paradoxe : le photon qui parcourt la plus grande distance revient en premier. Peut-être, encore plus paradoxal, une particule de matière, de vitesse initiale β_0 comprise entre 1 et β_{0e} arrivera aussi avant la lumière, tout en parcourant une distance plus grande et en allant, *a priori*, moins vite. β_{0e} est la vitesse que la particule de matière doit avoir pour parcourir ACA avec le même temps qu'un photon pour parcourir ABCBA. Nous trouvons une version relativiste du *paradoxe du lièvre et de la tortue* des *Fables de La Fontaine*.

Pour les calculs :

$$T_{ABCBA} - T_{ACA}(\beta_0)$$

$$= 4 \operatorname{arcosh}(1 + L^2/2) - 2 \operatorname{arcosh}\left[\frac{1 - \sqrt{1 - (1 - \beta_0^2)(1 + \beta_0^2 + 4L^2)}}{1 - \beta_0^2}\right] \simeq L^3/2 - 4L(1 - \beta_0) \quad \text{si } L \ll 1 \text{ et } \beta_0 \simeq 1 \quad (18)$$

$$\beta_{0e} = \sqrt{\frac{L^2(1 + L^2/4)^2 + 1}{(1 + L^2/2)^2(1 + L^2/4)}} \simeq 1 - L^2/8 \quad \text{et} \quad \gamma_{0e} = \frac{2 + L^2}{L} \sqrt{1 + L^2/4} \simeq 2/L \quad \text{pour } L \ll 1 \quad (19)$$

Pour un électron avec $\gamma_0 = \sqrt{2}\gamma_{0e}$, toujours pour $a_p = 10 \text{ m/s}^2$ et $l = 1 \text{ ua}$, soit $L = 1/60\,000$, comme $1 - \beta \simeq 1/2\gamma^2$, $t_{ABCBA} - t_{ACA}(\beta_0) \simeq 35 \text{ ns}$.

Nous obtenons une fable relativiste : Au départ de la course, le photon rapide est devant l'électron massif. L'électron prend alors une trajectoire en un seul saut, certes plus longue, mais qui l'amène plus haut où le temps va plus vite. Vu d'en haut le temps du photon se fige et l'électron parvient ainsi à doubler son adversaire.

Déjà en C, l'électron rebondit avant le photon.

6. DISCUSSION

Nous avons choisi d'adopter le point de vue non inertiel. Il semble naturel de se mettre à la place de l'observateur accéléré. Par exemple, pour comprendre pourquoi et comment l'occupant de l'ascenseur ressent une gravité artificielle. Il est aussi intéressant de noter que le mouvement de R par rapport à R' est défini depuis le référentiel non inertiel où l'accélération propre, a_p , est imposée constante, contrairement à $a(O')$, tracé sur la figure 12, et $a'(O) = a_p/\gamma^3$ avec γ le facteur de dilatation temporelle. Tous les résultats de cet article pourraient, bien sûr, être aussi trouvés depuis le référentiel inertiel. D'un point de vue mathématique, nous pourrions considérer que depuis le référentiel inertiel les calculs seraient plus simples, car les particules libres y ont des trajectoires rectilignes. Cependant, ce n'est pas évident car, bien que les trajectoires soient linéaires, les différentes parties des dispositifs expérimentaux bougent, comme dans le cas de l'interféromètre de Michelson ou de l'expérience des trois fusées, décrites en section 5. Tandis que dans le référentiel accéléré, les trajectoires sont en effet courbes, mais les différentes parties sont au repos les unes par rapport aux autres, et le jeu de coordonnées final est directement compréhensible par l'observateur. En comparaison, c'est, en un sens, similaire à la situation où nous essayons de comprendre des êtres bidimensionnels qui vivent à la surface d'une sphère, nous préférons nous mettre en immersion avec les coordonnées intrinsèques de Gauss^[1] et la métrique de la sphère, bien que l'on pourrait résoudre le problème depuis l'extérieur dans un espace tridimensionnel^[17]. De plus, c'est un bon exercice pour la relativité générale, où il n'y a pas de référentiel inertiel de référence. Nous devons nous sentir à l'aise de travailler directement dans un monde non-inertiel.

Néanmoins, le point de vue inertiel est le bienvenu pour compléter l'étude de notre pseudo-paradoxe. Un manuel^[5] nous fournit les formules : $X' = \sqrt{1 + T'^2} - 1$ et $\tau = c/a_p \times \operatorname{arcsinh} T'$. Nous devons ensuite trouver les intersections de différentes lignes d'univers rectilignes pour trouver T'_{AC} et T'_{ABC} . Dans R', les trajectoires sont des droites, la vitesse de la lumière est c, et le chemin ACA est plus court que le chemin ABCBA, mais nous perdons des symétries et le calcul est plus long. Comme on peut le voir à la figure 21, pour $L=2$ les rayons lumineux ne sont tracés que dans une direction, car, pour revenir à la fusée A, les trajectoires inertielles devront aller trop haut sur le diagramme. On trouve : $T'_{AC} = 2L\sqrt{1 + L^2}$ et $T'_{ABC} = L(\sqrt{1 + L^2/4} + \sqrt{1 + L^2/4(3 + L^2)^2})$, ainsi, pour faire court, à l'aide de la symétrie de la figure 20, $\Delta T = 2c/a_p \tau = 2(\operatorname{arcsinh} T'_{ABC} - \operatorname{arcsinh} T'_{AC})$, et nous obtenons l'équation (17).

De toutes façons, quel que soit l'observateur, la physique est la même. Dans tous les cas, pour obtenir la relativité restreinte non inertielle, il faut ajouter deux principes à la relativité restreinte inertielle, l'hypothèse de l'horloge – deux horloges à la même vitesse, quelle que soit leur accélération, subissent la même dilatation du temps – et le *principe d'équivalence* – pour tout événement de l'espace-temps, il existe, localement, un référentiel inertielle coïncidant.

7. CONCLUSION

Les calculs, présentés ici, restent relativement simples et utilisent les concepts de métrique, vitesse coordonnée et d'horizon, lesquels sont en partie réutilisés en relativité générale. Dans le même temps, ce cas d'école aide à éviter de nombreuses confusions en relativité. Pousser la relativité restreinte dans ses dernières limites non-inertielles, où un cadre minkowskien sous-jacent global perdure, permet de tracer un chemin continu depuis la relativité inertielle vers la relativité générale. Aussi, la vision théorique de l'ascenseur d'Einstein est élargie avec les équations des lignes d'univers généralisées à trois dimensions spatiales, et, espérons qu'un jour de nouveaux tests expérimentaux de la relativité restreinte non-inertielle seront réalisables.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Einstein, livre *La relativité*, 1916, voir *Quelques conséquences du principe de la relativité générale*, et, *Les coordonnées de Gauss*.
- [2] E.A. Desloge, R.J. Philpott, *Uniformly accelerated reference frames in special relativity*, Am. J. Phys. **55**, 252, 1987.
- [3] C. Møller, *The Theory of Relativity*, Oxford, 1ère éd. 1952, voir page 253.
- [4] W. Rindler, *Relativity: Special, General, and Cosmological*, Oxford University Press, 2nde éd. 2006, voir page 71 et 282 (Exercice 12.7).
- [5] L. Landau, E. Lifchitz, *Théorie des champs*, § Distances et intervalles de temps § Référentiel synchrone.
- [6] E.A. Desloge, *Spatial geometry in a uniformly accelerating reference frame*, Am. J. Phys. **57**, 598, 1989.
- [7] C. Semay, B. Silvestre-Brac, *Relativité restreinte, Bases et applications*, Dunod, 2° éd., 2005, voir page 258.
- [8] M. Rouaud, *Relativité restreinte, Approche géométrique*, www.voyagepourproxima.fr/relat.pdf, 2020, v. p243, 167, 387 et 157.
- [9] M. Born, *Die Theorie des starren Elektrons in der Kinematik des Relativitätsprinzips* [The theory of the rigid electron in the kinematics of the principle of relativity]. Ann. d. Phys. 1909, 335, 1–56.
- [10] J. D. Hamilton, *The uniformly accelerated reference frame*, Am. J. Phys. **46**, 83, 1978.
- [11] A. Spallicci, P. Ritter, *A fully relativistic radial fall*, Int. J. of Geom. Meth. in Mod. Phys. 11(10), July 2014.
- [12] E.A. Desloge, *Nonequivalence of a uniformly accelerating reference frame and a frame at rest in a uniform gravitational field*, Am. J. Phys. **57**, 1121, 1989.
- [13] G. Muñoz, P. Jones, *The equivalence principle, uniformly accelerated reference frames, and the uniform gravitational field*, Am. J. Phys. **78** (4), 377, 2010.
- [14] S.I. Blinnikov, L.B. Okun, M.I. Vysotsky, *Critical velocities $c/\sqrt{3}$ and $c/\sqrt{2}$ in the general theory of relativity*, Physics-Uspekhi, 46(10), 1099–1103, October 2003.
- [15] P. Tourrenc, *Relativité et gravitation*, 1992, voir page 185.
- [16] C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, *Gravitation*, W.H. Freeman & Co., 1973, voir page 848.
- [17] R.v.B. Rucker, *Geometry, Relativity and the Fourth Dimension*, Dover Publications, Inc: New York, NY, USA, 1977.
- [18] C. Geuting, *Relativité de l'espace-temps, effets gravitationnels*, Bull. Un. Prof. Phys. Chim., vol. 107, n° 952, p. 279-299, mars 2013.

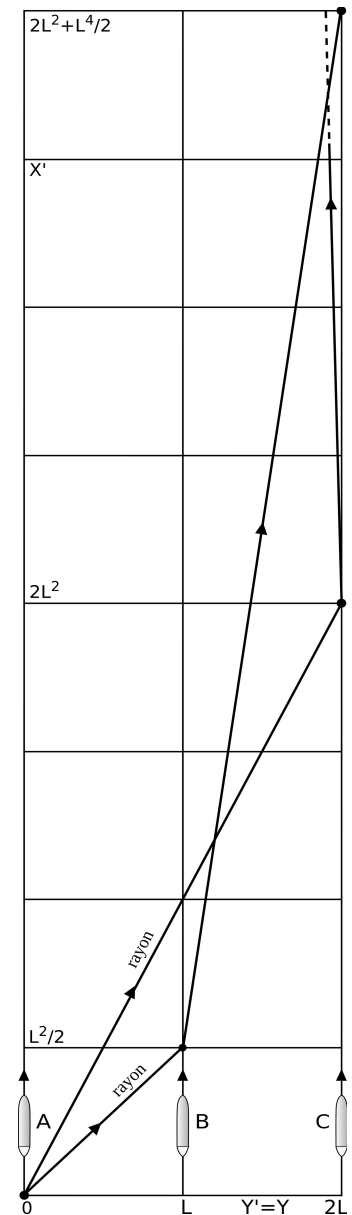


Fig.21 Point de vue inertielle.